Year. Month. Date.

اجسام دو دسته هستند = جامد و سیال. به جامد نیرو وارد کنی کمی جابجا میشه یا تغییر شکل میده.
به سیال نیرو وارد کنی شروع می‌کنه به حرکت کردن.

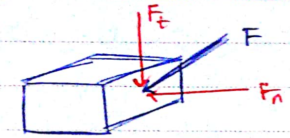
سیالات در برابر تنش برشی (که اینجوری محاسبه میشه تقسیم بر سطح) مقاومت نمی‌کنن و شروع می‌کنن به حرکت کردن

منبع → کتاب استریتر - مکانیک سیالات (ترجمه ملک زاده، کاشانه) ویرایش ۹
کتاب مکانیک سیالات مرادی مهدی رضا شیخی هم خوبه
کتاب وایت خیلی راحت و روون توضیح داده

class	1
TA (Quiz/home)	2-3
midterm	6-7
Final exam	10

تا فصل ۵ استریتر Streeter میان‌ترم

جلسه دوم ۹۸/۱۱/۲۷



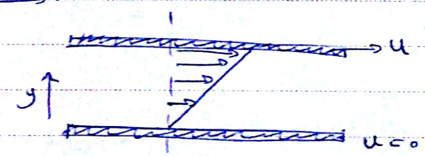
$\sigma_n = \frac{F_n}{A}$

shear برشی $\tau = \frac{F_t}{A}$

Fluid سیال → ماده ای که بر اثر اعمال تنش برشی تغییر شکل می‌دهد ولی تغییر شکل ادامه می‌یابد.

Solid جامد → " " " " " ولی تغییر شکل ادامه نمی‌یابد.

جریان → Flow



" → n پروفیل سرعت

ما دنبال تنش‌ها هستیم.

نرخ تغییر شکل زاویه ای $\tau \propto \frac{du}{dy}$

هر چی نیرو وارد کنم هم بیشتر
شیب هم داره هر جا

$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

μ → ویسکوزیته: مقاومت سیال در برابر اعمال تنش برشی.

ویسکوزیته مقدارش ثابت باشه یا نباشه اگر

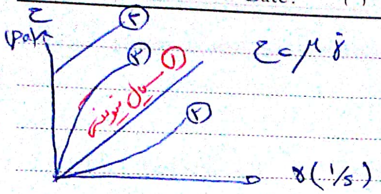
تغییر شکل زاویه ای:

$\gamma = \frac{dx}{dy}$

$\underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{نرخ تغییر شکل}} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy} \longrightarrow \boxed{\tau = \mu \dot{\gamma}}$

← این رابطه برای سیال نیوتنی برقراره.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



رفتار سیالات در برابر تنش ← ۱ سیال نیوتنی: $\mu = cte$ ؛ $\tau = \mu \gamma$

← سیال غیر نیوتنی ↓ ویسکوزیته‌شان ثابت نیست.

سری مواد هستن که هرچی بهشون ضربه بزنی سفت میشه.

سیالات { نیوتنی → $\mu = cte$
غیر نیوتنی → $\mu \neq cte$ }

۲ با افزایش تنش از یه حدی بیشتر، تغییر شکلش کمتر میشه. ← سیال منقبض شونده. (shear tickening)
مثل خمیرها Dilatant که هرچی تنش بیشتر، مقاومتش بیشتر و سیالیتش کمتر میشه

۳ با افزایش تنش تغییر شکلش بیشتر میشه (تغییر شکلش جلوتر حرکت می‌کنه..) ← (shear thining)
مثل رنگ‌ها ← پلیمرها. که هرچی تنش بیشتر، مقاومتش کمتر و سیالیتش بیشتر میشه

۴ از یه تنش به بعد شروع می‌کنه به حرکت کردن ← Bingham plastic
یه معین تنش تسلیم داره.

سیالات { قابل تراکم → $\rho \neq cte$ هوا در سرعت بالا
غیر قابل تراکم → $\rho = cte$ مایعات، هوا در سرعت پایین }

سیستم‌های اندازه‌گیری:

M	L	T	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$	LT^{-1}	LT^{-2}
جرم	طول	زمان	نیرو	فشار	سرعت	شتاب

متریک (بین‌المللی): دیمانسیون‌های اصلی

{ M → kg
L → m
T → s }

سیستم انگلیسی:

{ M → lbm
L → ft
T → s }

واحد نیرو :

انگلیسی: $32.17\ lbm \xrightarrow{1\ ft/s^2} \boxed{1\ lbf}$ ← پوند فورس

متریک: $1\ kg \xrightarrow{1\ m/s^2} \boxed{N}$ نیوتن

هر وقتی که جرم نوشته و برحسب پوند بود ضریب اصلاح باید حتماً تعریف شه.

$$F = \frac{ma}{g_c}$$

g_c : متریک 1 ، انگلیسی 32.17

حجم ویژه : مایعات تراکم‌ناپذیر ؛ V حجم

حجم بر واحد جرم ؛ $v = \frac{V}{m}$

" " " مولی ؛ $\bar{v} = \frac{V}{n}$

نرخ زمانی حجم ؛ $\dot{V} = \frac{V}{t}$

ضریب تراکم‌پذیری حجمی :

$$\boxed{K = \frac{-dP}{\left(\frac{dV}{V}\right)}}$$

چون افزایش فشار باعث کاهش حجم است.

تراکم یک لیتر آب با تغییر فشار $0.1\ MPa$ (حدود 1 اتمسفر) معلوم شود ؛ چقدر تغییر حجم می‌دهد؟

$K = 2200\ MPa$

$$2200 = \frac{-0.1}{dV/1} \Longrightarrow \boxed{dV = -45.45\ cm^3}$$

وزن مخصوص : $\boxed{\gamma = \rho g}$ ← جرم مخصوص

چگالی ویژه :

مایعات : $S = \frac{\gamma}{\gamma_{آب}} = \frac{\rho}{\rho_{آب}}$

گازها : $S = \frac{\gamma}{\gamma_{هوا}} = \frac{\rho}{\rho_{هوا}}$

اگر جرم lbm ، ضریب تصحیح g_c لازم داره :

$m = 32.17 \longrightarrow 1\ lbm$ (g_c)

$$F = \frac{mg}{g_c}$$

فارنهایت ← صفر دمای آب نمک یخ زده است.

$100°F$ دمای بدن انسان.

$F = \frac{9}{5}C + 32$

$K = C + 273.15$ ← کلوین

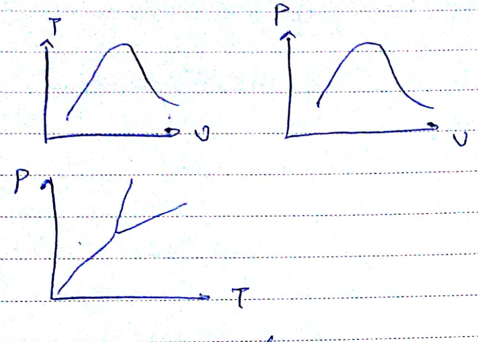
$R = F + 459.67$ ← رانکین

صفر مطلق دمایی که در آن جنبش حرکتی مولکول‌های سیستم صفر می‌شه.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چرا انجماد شد؟ چون در سیستم جنبش نوکی بوجود اومد که این لایه ها تا خشک شون میکن.

صفر ← نقطه ی سه گانه ی آب ← نقطه ای که در هر جا که بیاید آب همزمان در سه فاز جامد مایع و گاز وجود داره.



رابطه ی PVT روی این پیچیده است نمیدانیم.
جداول و نمودارها شو نداریم.
معادله ی حالت برای گاز ایده آل تعریف شد.

$$\boxed{PV = Z\,nRT}$$

ضریب تراکم پذیری

گاز ایده آل $Z = 1$

غیر ایده آل $Z \neq 1$

گاز ایده آل ← حجم کمی بین مولکول هاش هست و هیچ نیرویی روی هم وارد نمیکنند. $Z = 1$

$$Z = \frac{Pv}{RT}$$

$$Z = \frac{Pv}{RT}$$

$R = ۸٫۳۱۴\ kJ/kmol \cdot K$

$R = ۱۵۴۵\ \frac{ft\ lbf}{lbmol\ R}$

$R = \frac{\bar{R}}{M}$ ← جهانی

جرم مولکولی

$\bar{v} = Mv$ (m^3/mol)

$T\ (°K)$

$P = (Pa = N/m^2)$

اگر بخواهد ضریب تراکم پذیری Z را درست کنه می بینیم که در دمای اتاق $Z = 1$ و جون دما بیشتر بشه 0.04 میکنیم $Z = 1$ ا .0

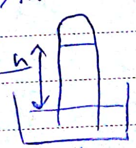
پاسکال $Pa = N/m^2$ ← متر

اینچ $P_g = lbf/in^2$

برای اندازه گیری فشار از بارومتر استفاده میشه

$$\boxed{P_{atm} = \rho g h}$$

فشار اتمسفر ← h

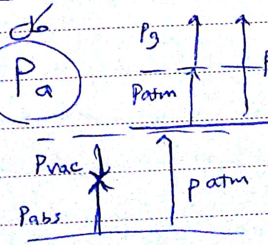


فشار کل؟

محیط نسبی کل

$$P_{atm} + P_{gage} = P_a$$

$$P_{atm} - P_g = P_a$$



اگر $P > P_{atm}$ ←

اگر $P < P_{atm}$ ←

اثر دما بر ویسکوزیته

مایعات } $T\uparrow$ $\mu\downarrow$

گازها | $T\uparrow$ $\mu\downarrow$

فشار در ویسکوزیته : { نیروهای بین مولکولی
انتقال مومنتوم بین مولکولی

اثر فشار بر ویسکوزیته

مایعات } $P\uparrow$ $\mu\uparrow$

گازها | $P\uparrow$ $\mu\uparrow$

$$\boxed{\frac{F}{A} = \tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

$$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$$

واحد اندازه‌گیری ویسکوزیته :

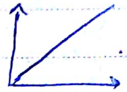
$$\boxed{Pa.s = 10\,poice}$$

تنش برشی ← مماس / تنش مماسی ← برشی ← سوالات در ایران تنش ها هیچ معنا و هیچ نشون نمیدن
ویسکوزیته (لزجت / گرانروی)

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$ → تنش وارده به سیال

ویسکوزیته

$\boxed{\tau = \text{ویسکوزیته} \times \text{گرادیان سرعت}}$ *



سیال نیوتنی ویسکوزیته ثابتی دارد.

در سیستم انگلیسی : $F = ma/g_c$ (F: lbf، m: lbm، g_c → ۳۲٫۱۷۴ lbm)

در سیستم متریک ۱ است.

تبدیل سلسیوس و فارنهایت به هم : $C = \frac{5}{9}(F-32)$ / $F = \frac{9}{5}C + 32$

چگالی سیال :

معمول چگالی $\rho = \frac{m}{V}$ است برای داشتن چگالی ویژه در مایعات $S.G = \frac{\rho}{\rho_{water}}$

(چگالی رو تقسیم بر چگالی آب میکنیم.) برای داشتن چگالی ویژه در گازها چگالی رو تقسیم بر

چگالی هوا میکنیم : $S.G = \frac{\rho}{\rho_{air}} = \frac{M_{gas}}{M_{air}}$

$P = \frac{F}{A}$ ($Pa = N/m^2$) or ($psi = lbf/in^2$)

$P_{atm} = \rho g h$

$1\,bar = 10^5\,Pa = 0.1\,MPa = 100\,kPa$

$1\,atm = 101{,}325\,Pa$

$1\,atm = 1\,kgf/cm^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P_{gage} = P_{abs} - P_{atm}$ فشار بالاتر از اتمسفر

$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs}$ فشار کمتر از اتمسفر

در سیالی اگر τ بر حسب γ یک خط راست باشد آن گاه سیال نیوتنی است و ضریب زاویه (شیب خط) هم ویسکوزیته خواهد بود

$\tau = \mu \dot{\gamma}$ نیوتنی

$\tau = f(\dot{\gamma})$ غیر نیوتنی

ویسکوزیته دینامیکی μ ویسکوزیته سینماتیکی $\nu = \mu/\rho$

کشش سطحی: وقتی دو سیال با هم در تماس در اثر جاذبه بین مولکولی ها ایجاد میشود. واحد کشش هم N/m است.

$P \pi r^2 = 2\pi r \sigma$

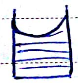
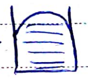
که فشار داخل قطره — سطح مقطع قطره — نیروی کشش سطحی مایع

که فقط دور محیط مایع در تماس میباشد.

کشش سطحی با افزایش دما کاهش می یابد.

کشش سطحی در سیالات تر شونده کشش سطحی بین سیال و لوله بیشتر از نیروی بین مولکولی سیال است.

سیال غیر تر شونده ←

آب  جیوه 

* معادله کشش سطحی در لوله موئین: $\boxed{P = \frac{\sigma}{r}}$ فشار، کشش سطحی مایع، شعاع لوله

انرژی جنبشی:

SI) $KE = \frac{1}{2} m v^2$ [kJ]

En) $KE = \frac{1}{2} m u^2 / g_c$ [ft.lbf]

انرژی پتانسیل:

SI) $PE = mgz$ (kJ)

En) $PE = mgz/g_c$ (ft.lbf)

انرژی درونی U

انرژی کل ← $E = U + KE + PE = U + m V^2/2 + mgz$ [kJ]

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P_{gage} = P_{abs} - P_{atm}$ فشار بالاتر از اتمسفر

$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs}$ فشار کمتر از اتمسفر

در سیال اگر τ برحسب $\dot{\gamma}$ یک خط راست باشد آن گاه سیال نیوتنی است و ضریب زاویه (شیب خط) هم
ویسکوزیته خواهد بود

$\tau = \mu \dot{\gamma}$ نیوتنی

$\tau = f(\dot{\gamma})$ غیر نیوتنی

ویسکوزیته دینامیکی μ ویسکوزیته سینماتیکی $\nu = \mu/\rho$

کشش سطحی: وقتی دو سیال با هم تماس دارند اثر جاذبه بین مولکول ها رخ میدهد. واحدش هم N/m σ

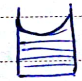
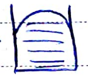
$P \pi r^2 = 2\pi r \sigma$

فشار داخل قطره — سطح مقطع قطره — نیروی کشش سطحی مایع
که فقط روی محیط مایع در تماس میباشد.

کشش سطحی با افزایش دما تغییر میکند.

کشش ~~سطحی~~ در سیالات تر شونده کشش سطحی بین سیال و لوله موئین بیشتر از نیروی بین مولکول سیال است.

سیال غیر تر شونده ←

آب  جیوه 

* معادله کشش سطحی در لوله موئین: $\boxed{P = \frac{\sigma}{r}}$ کشش سطحی مایع — فشار — قطر لوله

انرژی جنبشی:

SI) $KE = \frac{1}{2} m v^2$ [kJ]

En) $KE = \frac{1}{2} m u^2 / g_c$ [ft.lbf]

انرژی پتانسیل:

SI) $PE = mgz$ (kJ)

En) $PE = mgz/g_c$ (ft.lbf)

انرژی درونی U

انرژی کل ← $E = U + KE + PE = U + m\frac{V^2}{2} + mgz$ [kJ]

PAPCO

Scanned by CamScanner

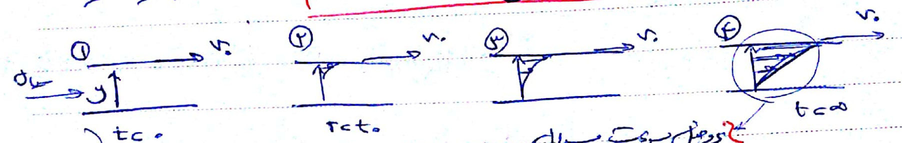
Subject:
Year. Month. Date. ( )

SI) $1\,J = 1\,N\,m = 1\,kg\,m^2 s^{-2} = 10\,cm^3\,bar$

En) $1\,J = 0{,}239\,cal$

* شرط عدم لغزش ← وقتی سیالی روی سطحی لغزش نداره یعنی سرعتش با اون سطح یکیه و روی سطح لیز نمی‌خوره.

قانون ویسکوزیته نیوتن $\boxed{\tau = \pm \mu \dfrac{dv}{dy} = \pm \mu \dot{\gamma}}$ نسبت تنش به تغییرات سرعت



در صفحه که پایینی ساکن و بالایی با سرعت V_0 در حال حرکت است.

توزیع سرعت سیال
سیال در تماس با جرم بالایی سرعت V_0 و در تماس با جرم پایینی سرعت ۰ دارد.

نرخ : rate — کمیت / زمان

شار : flux — کمیت / سطح

: rate of flux — کمیت / سطح زمان

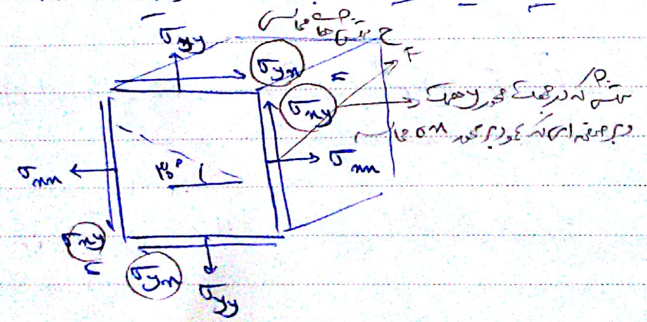
سیستم :
- جرم داخلش ثابته
- از مرزش انرژی عبور می‌کنه ولی جرم نه.

حجم کنترل :
- از مرزش انرژی و جرم عبور می‌کنه.

فصل دوم ← سیال ساکن static fluid

در سیالی که سرعت کم شده dv/dy هم صفر و پس تنش برشی نداریم $\tau = 0$.

سیال ساکن در دستگاه لوله‌کشی فشار، ریزش حجم، پایستاری و... هر صفحه حرکت و نیروی فشار استفاده می‌شه.

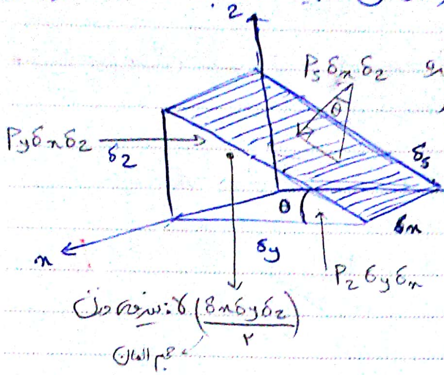


Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای اینکه ببینیم در یک نقطه فشار چگونه است یک برش می‌زنیم. (فرض کن مکعب چهار وجهی رو برش دادیم سیال رو) (شکل زیر)

نیرو = فشار × سطح

می‌دونیم که سیال ساکن تنش برشی ندارد. پس نیروها که داشتیم عمود هستند. فقط تنش عمودی ایجاد می‌کنه.



$$\Sigma F_y = P_y\delta_x\delta_z - P_s\delta_x\delta_z\sin\theta = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_y$$

جرم

$$\Sigma F_z = P_z\delta x\delta y - P_s\delta x\delta s\cos\theta - \gamma\left(\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}\right) = \rho\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}a_z$$

$$\Longrightarrow \Sigma F_y = P_y\delta x\delta z - P_s\delta x\delta z\sin\theta = 0$$

حالا فرض می‌کنیم المان کوچک و به صفر میل کند

$$\Sigma F_z = P_z\delta x\delta y - P_s\delta x\delta s\cos\theta - \gamma\left(\frac{\delta x\delta y\delta z}{2}\right) = 0$$

وقتی که می‌خواهیم فشار در یک نقطه رو به دست بیاریم یعنی سطح خیلی کوچک باید باشه و به سمت صفر میل کنه. یعنی δx و δy و δz رو باید به سمت صفر میل بدیم.

$$\boxed{\delta s\sin\theta = \delta y \quad , \quad \delta s\cos\theta = \delta x}$$

با نوشتن رابطه‌های ΣF_y و ΣF_z:

$$P_y\delta y - P_s\delta y = 0 \Longrightarrow P_y = P_s$$

$$P_z\delta x - P_s\delta x - \gamma\frac{\delta z\delta y}{2} = 0 \Longrightarrow P_z = P_s$$

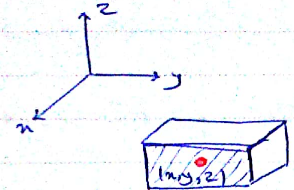
$$\Longrightarrow P_s = P_y = P_z$$

*اصل پاسکال: در سیال ساکن فشار در یک نقطه در تمام جهات یکسان است.
فشار تک‌تک یا اسکالر نقطه است.

(تا آخر صفحه ۴۰ کتاب)

سیال ایده‌آل $\mu = 0$ پس هیچ تنش برشی در آن وجود ندارد پس اصل پاسکال در آن صدق می‌کند.

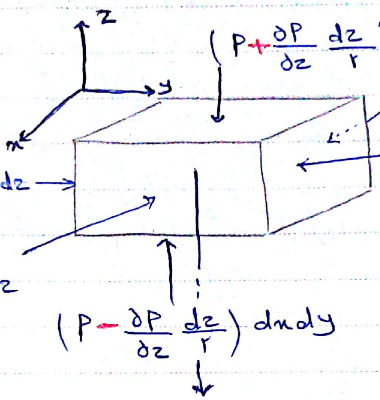
معادله اصلی سیال ساکن



$P =$ فشار در مرکز

$$P\Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} = P + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

المان $\Delta x \Delta y \Delta z$



$* \; m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$

قانون دوم نیوتن (برای سیال ساکن) :

$\Sigma F_x = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0 \quad , \quad \Sigma F_z = 0$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} &= \rho a_x \\ -\frac{\partial P}{\partial y} &= \rho a_y \\ -\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho (a_z + g) \end{aligned}\right.$$

$$dp = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho (a_z + g) dz$$

برای سیال ساکن : (ص ۴۲)

$$a_x = a_y = a_z = 0 \longrightarrow \boxed{dp = -\overset{\gamma}{\rho g}\, dz}$$

یعنی در سیال ساکن با تغییر ارتفاع فشار تغییر می کند فقط.

با فرض چگالی ثابت و انتگرال گیری داریم :

$\Delta P = -\rho g \Delta z$

or

$P + \rho g z = cte$

or

$\frac{P}{\rho g} + z = cte$

* $\frac{P}{\rho g} + z$ را هد پیزومتریک هم می گویند.

$$\text{if } P = 0 \text{ in } h = 0 \longrightarrow \boxed{P = \rho g h}$$

معادله اساسی سیال ساکن (هیدرواستاتیک)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در سیال هیدرواستاتیک (ساکن) ← در صفحه‌ی افقی تغییرات فشار صفر است یعنی فشار ثابت است.

← در راستای قائم تغییرات فشار داریم

← در صورتی که سیال تراکم ناپذیر باشد، تغییرات فشار با چگالی سیال، شتاب جاذبه و تغییرات ارتفاع متناسب است.

تغییرات فشار در راستای عمودی سیال تراکم پذیر: (گاز کامل) (ص ۴۳) (جرم ثابت باشد)

که از معادله گاز ایده‌آل

$dp = -\rho g dz$

در صورتی که گاز کامل داشته باشیم با دمای ثابت (مثل استراتوسفر):

$$dp = -\rho g dz$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} \Longrightarrow \rho = \frac{P}{P_0}\rho_0 \qquad Pv = R\,T^{\,cte}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\,dz \Longrightarrow \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\int_{z_0}^{z} dz$$

$$\ln P\Big]_{P_0}^{P} = \frac{-\rho_0}{P_0} gz\Big]_{z_0}^{z} \longrightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{-\rho_0}{P_0} g(z-z_0)$$

$$\Longrightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g(z-z_0)}{P_0}\right).$$

در جو: (دما متغیر است.)

$$T(z) = T_0 - \alpha z$$

$$\alpha = 0.0065\ K/m$$

$$Pv = nRT \Longrightarrow Pv = \frac{m}{M}RT \Longrightarrow P = \frac{m}{vM}RT \Longrightarrow P = \frac{\rho}{M}RT$$

$$dp = -\rho g dz$$

$$\Longrightarrow dp = -\frac{PM}{RT} g dz \Longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{-Mg\ dz}{R(T_0 - 0.0065z)}$$

انتگرال

$$\Longrightarrow \int_{P_{atm}}^{P}\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{R}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - 0.0065z} \Longrightarrow \ln(P)\Big|_{P_{atm}}^{P} = \frac{+Mg}{R(0.0065)} \ln(T_0 - 0.0065z)$$

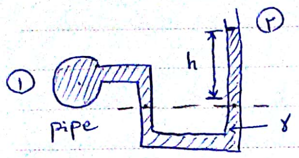
$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{P}{P_{atm}}\right) = \frac{Mg}{0.0065R}\ln\left(\frac{T_0 - 0.0065z}{T_0}\right) \Longrightarrow P = P_{atm}\left(\frac{T_0 - 0.0065z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{0.0065R}}$$

$$\text{if } z = 10 \longrightarrow \frac{P}{P_{atm}} = 0.999 \longrightarrow$$ تغییرات فشار در جو بسیار ناچیز است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

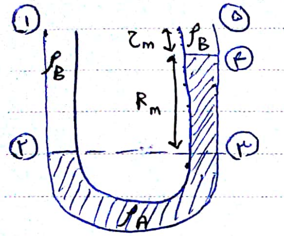
مانومتر: دستگاهی که از طریق تغییر ارتفاع، فشار را اندازه می‌گیرد.



$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2$$
$$P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$
$$\Delta P = \rho g h = \gamma h$$

وزن مخصوص

$$\text{if } P_2 = 0 \Longrightarrow P_1 = \rho g h$$



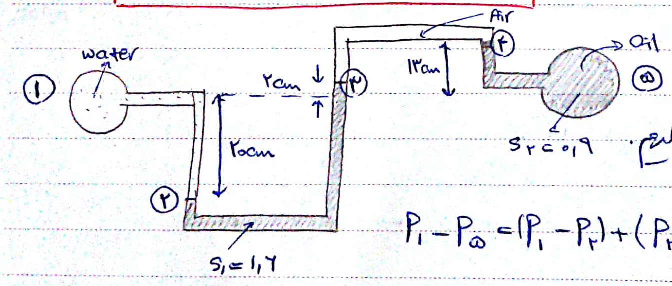
$$P_2 = P_1 + \frac{g}{g_c}\rho_B (z_m + R_m)$$
$$P_2 = P_3$$
$$P_4 = P_3 - \rho_A \frac{g}{g_c} R_m$$
$$P_5 = P_4 - \rho_B \frac{g}{g_c} z_m$$

$$P_5 = P_1 + \frac{g}{g_c}\rho_B (z_m + R_m) - R_m \frac{g}{g_c}\rho_A - z_m \frac{g}{g_c}\rho_B$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_5 = P_1 - \frac{g}{g_c} R_m (\rho_A - \rho_B)}$$

سیال از فشار بیشتر به فشار کمتر جریان می‌یابد.

مثال: اختلاف فشار بین دو مخزن؟



هرجا ماده عوض می‌شود Δz جدید داریم.

$$P_1 - P_5 = (P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + (P_3 - P_4) + (P_4 - P_5)$$

$$P_1 - P_5 = \rho_w g (z_2 - z_1) + 1.6 \rho_w g (z_3 - z_2) + 0 \times \rho_w g (z_4 - z_3) + 0.9 \rho_w g (z_5 - z_4)$$

$$= 1000 \times 9.81 (-0.2) + 1.6 \times 1000 \times 9.81 \times 0.22 + 0.9 \times 1000 \times 9.81 \times (-0.13)$$

$$= \boxed{343 \text{ Pa}}$$

PAPCO

اساس حل مسائل مانومتر:

اگر فشار رو بخواهیم برای نقطه ای محاسبه کنیم از یه نقطه ی مبا شروع حرکت + مجموع اختلاف ارتفاع ها را با احتساب علامت حرکت: به سمت بالا $d_i<0$ به سمت پایین $d_i>0$) ضرب در $\rho_i g$

برحسب فشار
$$\boxed{P_1 + \sum [d_i \times (\rho_i \times g)] = P_n}$$

$\begin{cases} d_i<0 & \text{if upward} \\ d_i>0 & \text{if downward} \end{cases}$

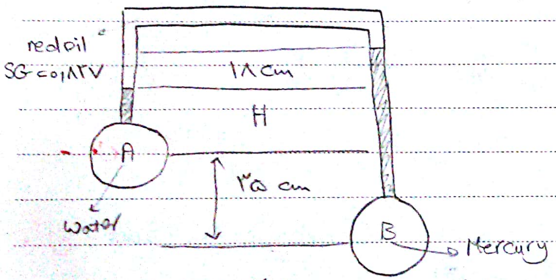
$\rho_i \times g \longleftrightarrow \gamma_i$ وزن مخصوص سیال i

$P / \underbrace{\text{وزن مخصوص آب}}_{\gamma_{\text{آب}}} = h =$ هد فشار برحسب متر آب

$$\Longrightarrow \boxed{h_1 + \sum [d_i \times S_i] = h_n}$$ برحسب هد فشار

$S_i = \dfrac{\gamma}{\gamma_{\text{آب}}} = \dfrac{\rho g}{\rho_w g}$

مثال: اگر اختلاف فشار A و B رو بدونیم: $P_B - P_A = 97\ kPa$ (دمای مواد درون لوله $25^\circ C$ هست). ارتفاع H برحسب cm را تعیین کنید.



$\gamma_{\text{آب}} = 9790\ N/m^3$

$\gamma_{\text{جیوه}} = 133100\ N/m^3$

$\gamma_{\text{redoil}} = (0.827)(9790) = 8096\ N/m^3$

$$P_B = P_A - \underbrace{\rho_w g}_{\gamma_{\text{آب}}} H(m) - \underbrace{0.827\,\rho_w g}_{8096}(0.18) + \underbrace{\rho_{\text{جیوه}}\, g}_{\gamma_{\text{جیوه}}}(0.18 + H + 0.035)$$

$$\cancel{P_A} + 97000 = -9790 \times H - 0.827 \times 9790 \times 0.18 + 133100 \times (0.035 + H) + \cancel{P_A}$$

$$\Longrightarrow H \approx 0.226\,m = \boxed{22.6\,cm}$$

Year.   Month.   Date.   ( )

⚠ اساس حل مسائل مانومتر:

اگر فشار رو بخواهیم برای نقطه ای محاسبه کنیم از یه نقطه ای شروع می کنیم + مجموع اختلاف ارتفاع ها را با احتساب

علامت حرکت: به سمت بالا $d_i<0$ به سمت پایین ($d_i>0$) ضربدر $\rho_i g$

برحسب فشار

$$\boxed{P_1 + \sum\left[d_i \times (\rho_i \times g)\right] = P_n}$$

⚠ $\begin{cases} d_i<0 & \text{if upward} \\ d_i>0 & \text{if downward} \end{cases}$

$\rho_i \times g \longleftrightarrow \gamma_i$ وزن مخصوص سیال i

$P / \underbrace{\text{وزن مخصوص آب}}_{\gamma_{\text{آب}}} = h =$ هد فشار برحسب ستون آب

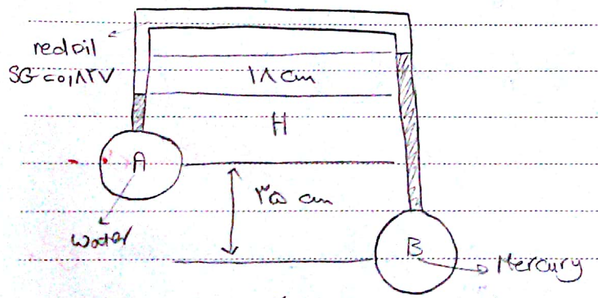
$$\Longrightarrow \boxed{h_1 + \sum\left[d_i \times S_i\right] = h_n}$$

برحسب هد فشار

$$S_i = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{آب}}} = \frac{\rho g}{\rho_w g}$$

مثال: اگر اختلاف فشار A و B روبرو شود: $P_B - P_A = 97\ kPa$ (همه مواد در دمای $20^\circ C$ هستند.)

ارتفاع H برحسب cm را تخمین بزنید.



$\gamma_{\text{آب}} = 9790\ N/m^3$

$\gamma_{\text{جیوه}} = 133100\ N/m^3$

$\gamma_{\text{red oil}} = (0.827)(9790) = 8096\ N/m^3$

$$P_B = P_A - \overbrace{(\rho_w g)}^{\gamma_{\text{آب}}} H(m) - \underbrace{0.827\overbrace{(\rho_w g)}^{\gamma_{\text{آب}}}}_{8096}(0.18) + \overbrace{(\rho_{\text{جیوه}}\, g)}^{\gamma_{\text{جیوه}}}(0.18 + H + 0.35)$$

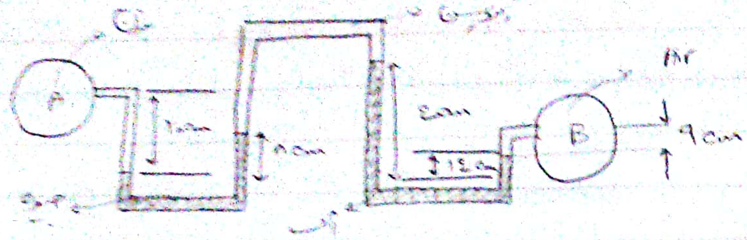
$$\cancel{P_A} + 97000 = -9790 \times H - 0.827 \times 9790 \times 0.18 + 133100 \times (0.53 + H) + \cancel{P_A}$$

$$\Longrightarrow H \approx 0.226\,m = \boxed{22.6\,cm}$$

$\rho = kg/m^3$, $\gamma = N/m^3$, $S = \frac{\gamma}{\gamma_{water}}$, (وزن مخصوص) $\gamma = \rho g$

Subject:
Year. Month. Date.

مثال: $P_A - P_B = ?$



$\gamma_{بنزن} = ۸۶۴۰ \ N/m^3$

$\gamma_{کروسین} = ۷۸۸۵ \ N/m^3$

$\gamma_{جیوه} = ۱۳۳۱۰۰ \ N/m^3$

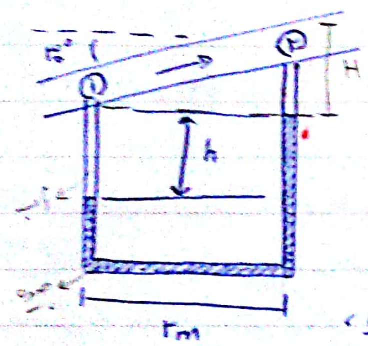
$\gamma_{آب} = ۹۷۹۰ \ N/m^3$

$\gamma_{هوا}$ ← کوچیکه و قابل صرف نظر $۱۲ \ N/m^2$

$$P_B = P_A + \gamma_{بنزن} \times (۰٫۲) - \gamma_{جیوه}(۰٫۰۸) - \gamma_{کروسین}(۰٫۴ - ۰٫۰۸) + \gamma_{آب}(۰٫۴ - ۰٫۱۴) + \gamma_{هوا}(۰٫۰۹)$$

$$P_B = P_A + ۸۶۴۰(۰٫۲) - ۱۳۳۱۰۰(۰٫۰۸) - ۷۸۸۵(۰٫۳۲) + ۹۷۹۰(۰٫۲۶) - ۱۲(۰٫۰۹)$$

$$\Longrightarrow P_B = P_A - ۸۸۹۸٫۸۸ \longrightarrow \boxed{P_A - P_B = ۸۹۰۰ Pa}$$



مثال: $P_1 = P_1 + ۹۷۹۰h - ۱۳۳۱۰۰h - ۹۷۹۰(۱٫۱۵۵ m) = P_2$

$\Longrightarrow P_1 - P_2 = ✓$

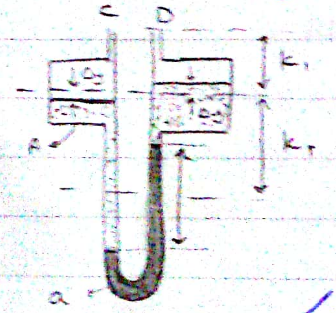
$* \ \arctan ۳۰ = \frac{H}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow H = ۱٫۱۵۵ \ m$

وسایل اندازه‌گیری فشار ← بوردن گیج

یک سری لوله‌ی مارپیچ که ماده داخلش هست و مطابق فشاری که ماده داره، تغییرشکل تو مارپیچ بوجود میاد که مقدار فشار رو تو کادرش میده.

میکرومانومترها: (ص ۵۳) ۳۶

در محیط با اختلاف فشار کم داریم که می‌خوایم این اختلاف رو اندازه‌گیری کنیم یعنی Δy (Δh) کم داره. توی این دستگاه از یک سیال سنگین و یک سیال سبک‌تر استفاده می‌کنیم. مسیر رو از نقطه‌ی C شروع می‌کنیم تا به D برسیم.



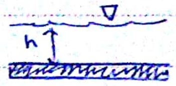
رابطه نهایی: $P_C - P_D = R \times$ عدد ثابت $\left(\frac{a}{A} \times \frac{\gamma_{ماده سنگین}}{\gamma_{آب}} \right)$

یه روش خیلی ساده‌ی دیگه هم اینه که میشه ارتفاع Δh رو با یه لوله‌ی شیب‌دار عوض کرد. یعنی میشه از مانومترهایی با لوله‌های شیب‌دار استفاده کرد.

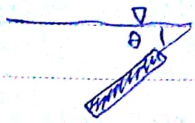
P4PCO

نیروهای وارد بر سطوح مختلف از طرف سیال ساکن :

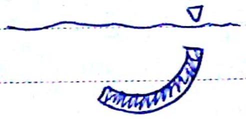
نیروی همواره عمود بر سطح وارد می‌شود حالا سوال این است که این نیرو چقدر و به کجا وارد می‌شود ؟ P (اینجا منظور برآیند فشارها و مرکز اثر آن روی سطح)



۱- سطوح تخت

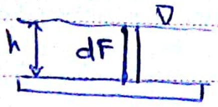


۲- سطوح مایل



۳- سطوح منحنی

① سطح تخت ← فشار در تمام نقاط از طرف مایع یکسان وارد می‌شود.
یک جزء سطح انتخاب می‌کنیم که جزء نیروی یکسان وارد می‌شود



$$P = \frac{F}{A} \qquad P = \frac{dF}{dA} \Longrightarrow dF = P\,dA \xrightarrow{P = \rho \frac{g}{g_c} h = \gamma h} dF = \gamma h\, dA$$

$$F_P = \int_A dF = \int_A P\,dA = \int_A \gamma h\, dA = \gamma h A \Longrightarrow \boxed{F_P = PA = \gamma h A}$$

حالا نیرو به کجا وارد می‌شود ؟ به جایی که برآیند نیروها وارد می‌شود و همچنین نقطه‌ای که گشتاور حول آن صفر شود.

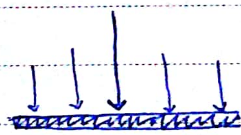
* گشتاور حاصل از نیروی برآیند با مجموع گشتاور حاصل از نیروها باید برابر باشد.

در حالتی که نیروها گسسته باشند :

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots + F_n X_n = F_P X_P = \sum_{i=1}^{n} F_i X_i$$

در حالتی که نیروها پیوسته باشند :

$$F_P X_P = \int x\, dF = M'$$



مرکز فشار $\boxed{x_P = \frac{1}{F_P}\int_A x\, dF}$

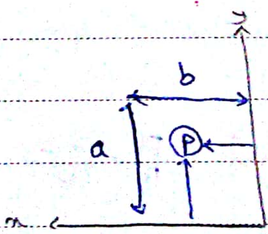
centroid

مرکز سطح ← $* \ \bar{x} = \frac{1}{A}\int x\, dA$, $* \ \bar{y} = \frac{1}{A}\int y\, dA$

مثلا سطح یک مستطیل :

$$\bar{x} = \frac{1}{ab}\iint x\, dx\, dy = \frac{b}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{ab}\iint y\, dx\, dy = \frac{a}{2}$$



یک سوم طول ارتفاع از قاعده ، مرکز سطح مثلث است (نسبت به قاعده)

گشتاور Moment ← ممان اول سطح نسبت به مرکز سطح صفره

$$* \ M^n = \int_A x^n\, dA$$

$I_y = \int_A x^2 \, dA \quad , \quad I_x = \int_A y^2 \, dA$ ← ممان دوم سطح

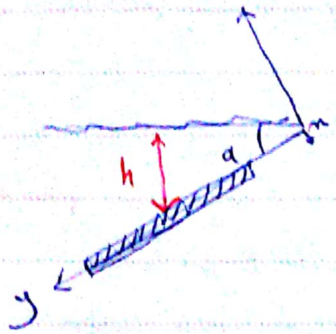
$I_{xy} = \int_A xy \, dA$ ← ممان اینرسی حاصل ضرب

* مرکز فشار (نقطه ی برآیند نیروهای فشاری) نقطه ایست که اگر ممان اول نیروهای فشاری حاصل ضرب مختصات کننده از این نقطه حساب کنیم، صفر خواهد بود. تعیین مرکز فشار مطابق بر مرکز سطح است (در سطح افقی)

(صفحه ی ۵۲۶ رو مطالعه کن!) ← (A-8)

(A-10)

② سطوح مایل ←



$$F = \int_A p \, dA \quad ; \quad p = \rho g h = \rho g y \sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} F &= \rho g \sin\alpha \int_A y \, dA \\ \bar{y} &= \frac{1}{A}\int_A y \, dA \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \rho g \sin\alpha \, A\bar{y} = \rho g \bar{h} A = \underbrace{P_G}_{\text{مرکز سطح}} A$$

$\bar{y}$ مرکز سطح

⟹ نیروی وارد بر سطح مایل: $\boxed{F = \underbrace{P_G}_{\text{مرکز سطح}} \cdot A}$

برای پیدا کردن مرکز فشار داریم: (۲-۶-۷) درادامه

$$x_p = \frac{1}{F_p}\int_A x \, dF = \frac{1}{F}\int_A x p \, dA$$

$$x_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin\alpha}\int_A x \gamma y \sin\alpha \, dA = \frac{1}{\bar{y} A}\int_A xy \, dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y} A}$$

(A.10) ⟹ $\boxed{\underbrace{x_p}_{\text{مرکز فشار}} = \frac{I_{xy}}{\bar{y} A} + \underbrace{\bar{x}}_{\text{مرکز سطح}}}$

x_p (x نسبت به هر محوری) میشه $\frac{I_{xy}}{\bar{y} A}$ + x مرکز سطح

⚠ اگر شکل نسبت به محور x یا y متقارن باشه ممان حاصل ضرب، I_{xy} میشه صفر. یعنی تو شکل متقارن مرکز فشار همون مرکز سطحه.

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A p y \, dA$$

$$y_p = \frac{1}{\gamma A \bar{y} \sin\alpha}\int_A y^2 \gamma \sin\alpha \, dA = \frac{1}{\bar{y} A}\int y^2 \, dA = \frac{I_x}{\bar{y} A}$$

Subject: از ص ۹۶ تا ص ۱۰۳ صفحه ی ... تمرین ۲۰۶ ... ؟
Year.   Month.   Date.   ( )

* $I_x = I_G + \bar{y}^2 A$

حواله مشبه

$$\boxed{y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y}_c}$$

(۱) فاصله مرکز فشار همیشه پایین تر از مرکز سطح

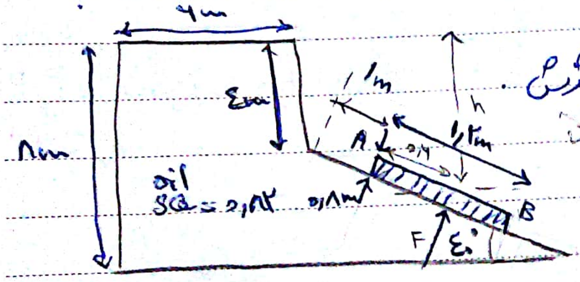
$$y_{cp} = -\frac{I_c}{\bar{y}A} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{\bar{y}A}$$

$$y_p - \bar{y}_c = \frac{I_G}{\bar{y}A}$$

* مرکز سطح مستطیل $I_c = \frac{bh^3}{12}$ * مرکز سطح دایره $I_c = \frac{\pi R^4}{4}$

* مرکز سطح مثلث با ارتفاع h به فاصله $\frac{1}{3}$ از قاعده $I_c = \frac{bh^3}{36}$ * مرکز سطح نیم دایره نسبت به فاصله $\frac{4R}{3\pi}$ از قطر

(۱) مثال ← دریچه ی مستطیل شکلی داریم (صفحه ای به طول $1{,}2m$ و عرض $0{,}8m$). لولای در نقطه ی A وجود دارد و نقطه ی B چفت. نیرو وارد شود تا دریچه بلند شود.
هدف: بدست آوردن برآیند نیروهای وارد بر دریچه و نقطه ی اثرش.



$F = P_G \cdot A$ صفحه مایل ← مرکز سطح دریچه داده شده

$$P_G = \rho g h = \rho g(4 + 1\sin 40 + 0{,}6\sin 40) = \rho g(5{,}028m)$$

$$\Rightarrow P_G = (0{,}82 \times 9790) \times (5{,}028m) = 40363{,}78$$

$$\Rightarrow F_{AB} = (40363{,}78) \times (1{,}2 \times 0{,}8) = \boxed{38750N}$$ ← برآیند نیروهای وارد بر دریچه. شکل مستطیل و مرکز سطح ... است

$x_p = x' = 0{,}6$

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y} \quad ? \quad (\bar{y} = 5{,}028)$$

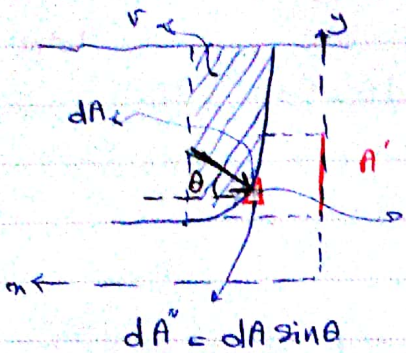
برای مستطیل بالایی $= \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I_{G\,\text{دریچه}} = \frac{(0{,}8)(1{,}2)^3}{12}$

$$\Rightarrow y_{cp} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{\bar{y}A} = -\frac{(0{,}8)(1{,}2)^3/12 \ \sin 40}{(5{,}028)(1{,}2 \times 0{,}8)} = -0{,}0153m$$

$$\Rightarrow x_p = 0{,}6 + 0{,}0153 \simeq \boxed{0{,}615m}$$

PAPCO

سطح منحنی ← (۳)



$$dF = PdA \Longrightarrow F_p = \int dF = \int \gamma h\, dA$$

$$dA' = dA\cos\theta$$

$$dA'' = dA\sin\theta$$

$$dF_x = dF\cos\theta \longrightarrow F_x = \int dF_x$$

$$dF_y = dF\sin\theta \longrightarrow F_y = \int dF_y$$

$$* F_p = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$* F_x = \int_A p\,dA\cos\theta = \int_{A'} p\,dA' = \boxed{\bar{P}A'} \longrightarrow$$

$* F_x = \gamma \bar{h} A'$ * در مرکز سطح تصویر قائم داریم

$$* F_y = \int_A p\,dA\sin\theta = \int_{A''} p\,dA'' = \int_{A''} \gamma h\,dA'' = \int_V \gamma\,dV = \boxed{\gamma V}$$

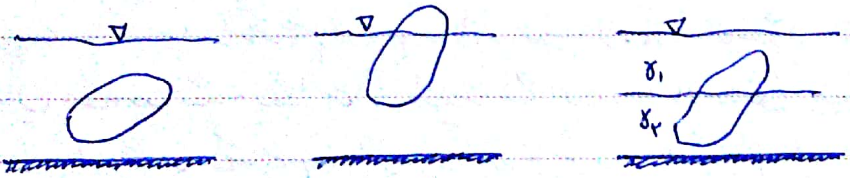
مولفه ی افقی نیروی وارد بر یک سطح منحنی برابره با فشار وارده بر تصویر اون سطح بر محور ل انگار دیگه اون انحنا وجود نداره

مولفه ی عمودی نیروی وارد بر یک سطح منحنی برابره با وزن مایعی که روی منحنی قرار داره.

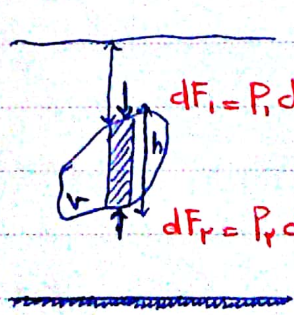
$$\bar{x} = \frac{1}{V}\int_A x\,dV \longrightarrow$$ مختصات مرکز حجم سیال بالای سطح

نیروی شناوری Buoyancy Force : هر جسمی وارد سیالی میشه از طرف سیال نیرویی به جسم وارد میشه به نام شناوری. در واقع نیرویی به سمت بالا به اون جسم وارد میشه که برابر نیروی وزن سیال هم حجم اون جسم هست. (نیروی بویانسی)

* وقتی جسمی وارد سیالی میشه به اندازه ی وزن سیال هم حجم اون جسم از وزنش کم میشه.



غوطه ور — شناور — غوطه ور در دو سیال امتزاج ناپذیر



نیروی وزن ↓

نیروی شناوری ↑

$$dF_1 = P_1\,dA = \gamma h_1\,dA$$

$$dF_2 = P_2\,dA = (\gamma h_1 + \gamma h)\,dA$$

$$dF_B = (\gamma h_1 + \gamma h)\,dA - \gamma h_1\,dA$$

$$dF_y = dF_B = \gamma\,dV$$

$$F_B = \int dF_B = \int_V \gamma\,dV = \gamma\int_V dV = \boxed{\gamma V}$$ نیروی شناوری

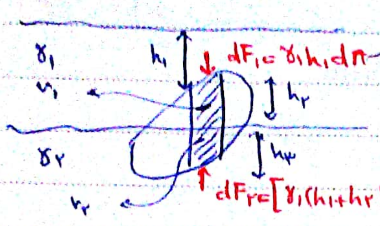
به کجا وارد میشه؟

$$(*)\begin{cases} x_p = \dfrac{1}{F}\displaystyle\int_A x\,dF = \dfrac{1}{\gamma V}\int x\gamma\,dV \Longrightarrow x_p = \dfrac{1}{V}\int x\,dV \\ y_p = \dfrac{1}{F}\displaystyle\int_A y\,dF = \dfrac{1}{\gamma V}\int y\gamma\,dV \Longrightarrow y_p = \dfrac{1}{V}\int y\,dV \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date

نیروی وزن اجسامی که بالای جسم قرار گرفته‌اند

نیروی شناوری – سیال امتزاج ناپذیر :



$$dF_B = dF_2 - dF_1 = P_2\, dA - P_1\, dA$$

$$dF_B = [\gamma_1(h_1+h_2) + \gamma_2 h_3]\, dA - [\gamma_1 h_1]\, dA$$

$$dF_B = \gamma_1\, dV_1 + \gamma_2\, dV_2$$

$$F_B = \int dF_B = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2$$

نیروهای افقی وارد بر جسم صفره و نیروی عمودی وارده بالایی آن برابر نیروی بویانسی.

* جهت نیروی بویانسی همواره رو به بالا بوده و مقدار آن برابر وزن سیال هم‌حجم جسم (بخشی از جسم که درون سیال قرار گرفته است) می‌باشد.

نیروی شناوری $\boxed{F_B = \gamma V}$ ← قسمت غوطه‌ور در آب

مثال: * اگر جسم غوطه‌ور شود، به اندازه‌ی وزن مایع جابجا شده سبک‌تر می‌شود.

$V_T = V_1 + V$

$F_y = F_B = \gamma_{هوا} V_1 + \gamma_{آب} V$

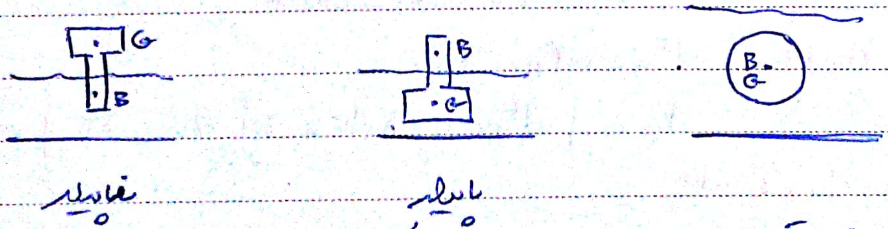
$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$F_y = F_B = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + \gamma_3 V_3 + \gamma_4 V_4$

نیروی شناوری کل، سهمی که هرکدوم از این سیال‌ها به جسم وارد می‌کنند.

⚠ نیروی بویانسی در مرکز حجم جسم غوطه‌ور در سیال وارد می‌شود (بخش غوطه‌ور) ← اگر جسم کاملاً در سیال غوطه‌ور باشد، نقطه‌ی اثر نیروی شناوری کاملاً منطبق بر مرکز ثقل قرار می‌گیرد. ولی در حالت کلی مرکز حجم بخش غوطه‌ور که مرکز بویانسی نام دارد ممکن است روی مرکز ثقل قرار نگیرد.

تعادل سیستم بر اساس محل قرارگیری مرکز بویانسی و مرکز جرم تعیین می‌گردد.



ناپایدار پایدار

اگر مرکز جرم بالاتر از مرکز بویانسی باشه تعادل ناپایداره. (یعنی قسمت سنگین بالاست)
" " پایین‌تر " " " " پایداره. (یعنی قسمت سنگین پایینه)
" " روی " " " " تعادل خنثی است.

Subject: ۵۹ هر ۶۸ دهش ۹-۳ هفته اول فصل ۴ اوهر ۷۹ بهمه هفته
Year. Month. Date. ( )

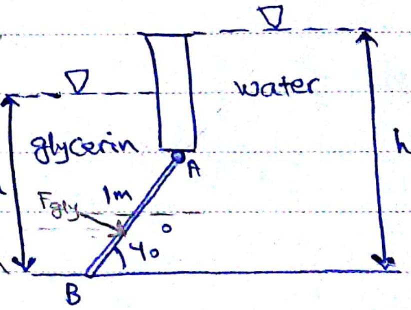
* معلوم استفاده از بنیادی برنامه ← برای تعیین چگالی اجسام با شکل هندسی نامتعارف:

ابتدا حجم را پیدا کنید. هیچ جسم با وزن مشخص در مایع سیال کرده بعد مقدار سیال خروجی حجم آن جسم را که در شده است چون مقدار سیال خروجی برابر وزن سیال هم حجم آن جسم نامتعارف است.

← چگالی سنج (Hydrometer)

مثال - دریچه AB دارای جرم ۱۸۰ کیلوگرم و طول ۱٫۲ متر در راستای عمق صفحه است. اگر سیالات موجود در مساله در دمای ۲۵ درجه سانتیگراد بوده و دریچه در نقطه ی B روی زمین تکیه داده شده باشد، تعیین کنید: سطح چه عمقی از h نیروی وارد بر نقطه ی B صفر خواهد بود؟

$$\gamma_w = 9790\ N/m^3 \quad ; \quad \gamma_{glycerin} = 12360\ N/m^3$$



AB مرکز سطح $y_c = \frac{AB}{2}\sin 60 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.433$

یعنی چون مرکز سطح گلیسرین؟ در مقابل AB می‌شه

$$W_{AB} = mg = 180 \times 9.81 = 1766\ N$$

$$\begin{cases} h_{cg} = 2 - \frac{AB}{2}\sin 60 = 2 - 0.433 = 1.567\ m \\ F_{Gly} = \gamma_{Gly}\, h_{cg}\, A_{AB} = 12360 \times 1.567 \times (1 \times 1.2) = 23242\ N \\ y_{cp\,gly} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{h_{cg}A} = -\frac{1/12\,(1)^3(1.2)\sin 60}{1.567 \times 1.2} = -0.0461\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_w = \gamma_w \bar{h} A_{AB} = 9790 \times \bar{h} \times 1.2 \\ y_{cp\,water} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{\bar{h}A} = -\frac{1/12\,(1)^3(1.2)\sin 60}{\bar{h} \times 1.2} = -\frac{0.0722}{\bar{h}}\ m \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow \sum M_A = 23242\,(\ ?\ ) + 1766\,(0.5) - 9790 \times$$

$$1.567 =$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم : دینامیک سیالات غیرلزج (غیرمنیوتنی)

سیستم مجموعه ای با جرم ثابت است که با محیط تبادل انرژی دارد اما تبادل جرم ندارد. سیستم کار هم تبادل می کند.
سیستمی که با بیرون جرم ، انرژی و کار تبادل نمی کند سیستم ایزوله نام دارد.
حجم کنترل یک حجم ثابت است که با محیط تبادل کار و انرژی و همینطور تبادل جرم هم دارد. حجم کنترل یک سیستم باز است.

نحوه ی بررسی سیستم (ذرات) :
سیستم لاگرانژی ← یک توده ی کوچک از سیال در نظر گرفته می شود و حرکت آن را دنبال می کنیم. این توده را می توان بصورت مجموعه ای از ذرات در نظر گرفت.
در هر نقطه سرعت و مکان شتاب خاص خود را دارد و تابع زمان است.

* روش اویلری ← سرعت و شتاب تابع مکان و زمان خود هستند. یک دستگاه مختصات ثابت رفت می کنیم و یک حجم کنترل در نظر می گیریم و نحوه ی حرکت سیال درون آن را بررسی می کنیم.

Flow : جریان تراکم ناپذیر : چگالی سیال نسبت به زمان ثابت می ماند. مایعات تراکم ناپذیرند. $\frac{\delta \rho}{\delta t} = 0$
* اگر $M < 0.3$ گاز تراکم ناپذیر فرض می شود. گازها تراکم ناپذیر فرض می شوند
* اگر $M > 0.3$ گاز تراکم پذیر فرض می شود $M = \frac{v}{c}$
* جریان ایده آل : ویسکوزیته ی صفر دارد و تراکم ناپذیر است. $(\mu = 0)$

جریان آدیاباتیک : انتقال گرما به محیط و دریافت گرما از محیط ندارد.
جریان ثابت یا دائم : steady نسبت به زمان هیچ تغییری نمی کند.
جریان یکنواخت : uniform یعنی جریان تابع مکان نیست و در هر نقطه ای یکسان است (غیریکنواخت $\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0$)

دو جریان :
Laminar – آرام ← ذره ی سیال در حال حرکت با ذرات اطراف خود مخلوط نمی شود. ولایه ها بصورت موازی هم حرکت می کنند.
Turbulent – درهم ← ذرات سیال حرکت نامنظم دارند و نقاط در فشار و سرعت بطور اتفاقی تغییر می کنند.

عدد رینولدز Reynolds : $\boxed{Re = \frac{\rho u d_i}{\mu}}$ سرعت ، قطر یا طول (لوله ، صفحه)

علامت بدون بعد و مقیاسی برای تشخیص جریان آرام و درهم.

$v = \frac{\mu}{\rho}$ → $Re = \frac{vL}{v}$

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

* اگر Re کم باشد یعنی کمتر از ۲۱۰۰ جریان آرام است و اگر بیشتر از ۲۱۰۰ باشد، جریان درهم است.
← اگر Re کم باشد جریان لایه‌ای و اگر زیاد باشد توربولانت است.

بین دو حالت آرام و درهم حالت گذرا transiant هست که دو جریان در حال تبدیل به هم هستند.

حل جریان Turbulent : رابطه تنش برای سیال توربولانت

$$\boxed{\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy}}$$

μ : تابع سیال: ویسکوزیته

η : eddy viscosity گردابی : به نوع جریان و سیال بستگی دارد
پس عدد ثابتی نیست و مربوط به سیال خاصی نیست.

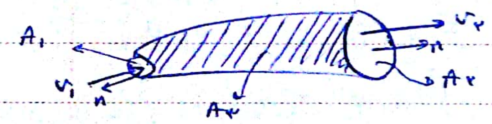
path line ← خط سیر، مسیر حرکت ذره را نشان می‌دهد.

stream line ← خطوط جریان که بردار سرعت در هر نقطه بر آن مماس است.

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{u} = \frac{\delta z}{u}$$

خط سیر یک خط فیزیکی و خط جریان فرضی است. در جریان آرام این خطوط روی هم قرار می‌گیرند.

لوله جریان از چند خط جریان تشکیل شده و بر مقاطعش سرعت ثابت. سرعت در سطح مقطع آن یکنواخت است و اتلاف ماده در آن وجود ندارد.



خطوط پتانسیل هم خطوط فرضی هستند که بر خطوط جریان عمودند.

قانون انتقال رینولدز:

تغییرات N سیستم با زمان:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{dN_{cv}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) - N_1(t_1+\Delta t)}{\Delta t}$$

بردار یکه سطح

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{cv} \eta \rho \, dv}_{\text{تغییرات N در حجم کنترل}} + \underbrace{\int_{cs} \eta \rho \hat{n} v \, dA}_{\text{مقداری که از سطح خارج می‌شود}}$$

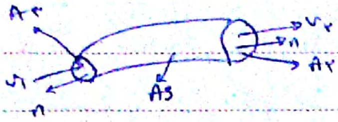
۱- بدست آوردن معادله پیوستگی جرم : $\eta = 1 \ , \ N = m \longrightarrow \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{sys} \rho \, dv = 0$

$$\xrightarrow[\text{معادله پیوستگی}]{\eta = 1} \frac{DN}{Dt} = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t}(\eta \rho)\, dv + \int_{cs} \eta \rho \hat{n} v \, dA$$

$$0 = \int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{cs} \rho \hat{n} v \, dA$$

$$\boxed{\iint_{cs} \rho (v \cdot n)\, dA + \frac{d}{dt}\left(\iiint_{cv} \rho \, dv\right) = 0}$$

پایستگی جرم برای حجم کنترل

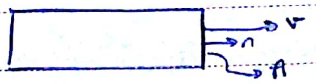


اگر جریان steady state فرض شود، انتگرال سه گانه صفر میشود.

$$\Rightarrow \iint_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \iint_{A_1} \rho \underbrace{(\vec{v}_1\cdot\vec{n})}_{-v_1} dA_1 + \iint_{A_2} \rho \underbrace{(\vec{v}_2\cdot\vec{n})}_{v_2} dA_2 + \iint_{A_s} \rho \underbrace{\overbrace{(\vec{v}\cdot\vec{n})}^{\theta=90}}_{0} dA_s = 0$$

n ← بردار نرمال سطح: بردار واحد برداری یکه ای است که همیشه عمود بر سطح و رو به بیرون C.V است.

$$\begin{cases} \dot{m} = \dfrac{m}{t} \\ \dot{m} = \rho v A \\ d\dot{m} = \rho v\, dA \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{m} = \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})A = \rho(v\cos\theta)A \\ \quad v\cos\theta)\,dA \end{cases}$$

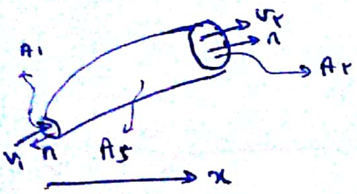
جریان غیر قابل تراکم در لوله ی جریان:

* غیر قابل تراکم یعنی ρ ثابت

اگر $0<\theta<90$ باشد $\cos\theta>0$ و $d\dot{m}>0$ اصطلاحا outlet

اگر $90<\theta<180$ باشد $\cos\theta<0$, $d\dot{m}<0$ inlet

اگر $\theta=90$ باشد



معادله پیوستگی

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \\ \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \end{array}}$$

$$\iint_{A_1} \rho \underbrace{(\hat{v}_1\cdot\hat{n})}_{-v_1} dA_1 + \iint_{A_2} \rho \underbrace{(\hat{v}_2\cdot\hat{n})}_{+v_2} dA_2$$

$$+\iint_{A_s} \rho \underbrace{(\hat{v}\cdot n)}_{\theta=0\,\to\,0} dA_s = 0$$

$=1$

$+\rho v\, dA$

$$\Rightarrow -\rho\iint_{A_1} v_1\, dA_1 + \rho\iint_{A_2} v_2\, dA_2 = 0$$

$$-\rho v_1\iint_{A_1} dA_1 + \rho v_2\iint_{A_2} dA_2 = 0$$

در صورتی که سرعت ورودی و خروجی ثابت و یکنواخت باشند.

در صورت وجود یک ورودی و خروجی یک جزیی با سرعت ثابت.

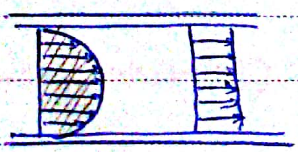
! و اگر سرعت یکنواخت نباشد:

* دبی جرمی $[kg/s]$ $= \rho \bar{v} A$

* دبی حجمی $[m^3/s]$ $Q = \bar{v} A$

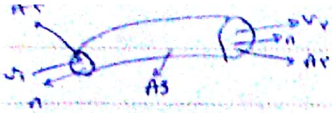
اگر جریان داخل لوله ها باشد باید از سرعت متوسط در معادله پیوستگی استفاده بشود. (در لوله فقط سرعت واقعی داریم اما از سرعت متوسط در محاسبات می توان استفاده کرد.

اندازه گیری $\bar{v}$ با دو روش: ۱- روش آزمایشگاهی : تعریف سرعت متوسط: سرعتی که مقدار جرمی که انتقال می دهد دقیقا برابر مقدار جرمی است که سرعت واقعی منتقل می کند.



$$\frac{m}{t} = \dot{m} \Rightarrow \rho \bar{v} A$$

$$\longrightarrow \bar{v} = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$



جریان Steady state فرض شد، انتگرال سه‌گانه صفر میشه.

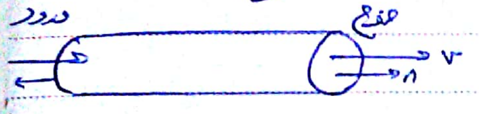
$$\Rightarrow \iint_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \iint_{A_1} \rho\underbrace{(\vec{v}_1\cdot\vec{n})}_{-v_1} dA_1 + \iint_{A_2} \rho\underbrace{(\vec{v}_2\cdot\vec{n})}_{v_2} dA_2 + \iint_{A_3} \rho\underbrace{\overset{\theta=90}{(\vec{v}\cdot\vec{n})}}_{0} dA_3 = 0$$

n ← بردار نرمال سطح عمود و خارج از سطح است که همیشه عمود بر سطح و به سمت بیرون C.V است.

$$\begin{cases} \dot{m} = \dfrac{m}{t} \\ \dot{m} = \rho v A \\ d\dot{m} = \rho v\, dA \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{m} = \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})A = \rho(v\cos\theta)A \\ d\dot{m} = \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \rho(v\cos\theta)\,dA \end{cases}$$

اگر $0<\theta<90$ باشد $\cos\theta>0$ و $d\dot{m}>0$ اصطلاحا outlet یا خروجی داریم.
اگر $90<\theta<180$ باشد $\cos\theta<0$ ، $d\dot{m}<0$ و inlet یا ورودی داریم.
اگر $\theta=90$ باشد



ورودی — خروجی

$\theta = 180^\circ$ | $\theta = 0^\circ$

$\cos(180^\circ) = -1$ | $\cos(0) = +1$

$d\dot{m} = -\rho v\, dA$ | $d\dot{m} = +\rho v\, dA$

معادله پیوستگی

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \\ \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \end{array}}$$

در صورت وجود یک ورودی و یک خروجی با سرعت ثابت.

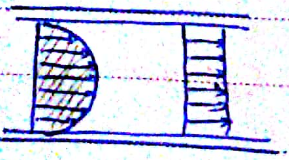
! وقتی سرعت یکنواخت نباشد:

$\dot{m} = \int_A \rho v_n\, dA$ $\quad \dot{m} = \rho \bar{v} A$ $\quad [kg/s]$ دبی جرمی *

$Q = \int_A v_n\, dA$ $\quad Q = \bar{v} A$ $\quad [m^3/s]$ دبی حجمی *

اگر جریان داخل لوله باشد باید از سرعت متوسط در معادله پیوستگی استفاده شود. (در لوله فقط سرعت واقعی داریم اما از سرعت متوسط در محاسبات می‌توان استفاده کرد.

اندازه گیری $\bar{v}$ با دو روش: ۱- روش آزمایشگاهی : تعریف سرعت متوسط: سرعتی که مقدار جرمی که انتقال می‌دهد برابر مقدار جرمی است که سرعت واقعی منتقل می‌کند.



$$\frac{m}{t} = \dot{m} \Rightarrow \rho \bar{v} A$$

$$\longrightarrow \bar{v} = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

۲ـ روش محاسباتی: اگه در لوله المان‌ها رو به صورت زیر در نظر بگیریم:

$dA = 2\pi r dr$

$$d\dot m = \rho v dA$$

$$\dot m = \iint_A \rho v dA \xrightarrow{\rho : cte} \rho \bar v A = \iint_A \rho v dA$$

$$\boxed{\bar v = \frac{1}{A}\iint_A v dA} \longrightarrow \text{محاسبه‌ی سرعت متوسط}$$

جریان لمینار در یک لوله:

$$\bar v = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} 2\pi r dr$$

$$\boxed{\bar v = \frac{v_{max}}{2}} \longrightarrow \text{سرعت متوسط جریان لمینار}$$

لمینار: $v = v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$

* پروفیل سرعت داخل تیوب در جریان

توربولنت: $v = v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)\right\}^{1/7}$

جریان توربولنت در لوله:

$$\bar v = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)\right\}^{1/7} 2\pi r dr$$

$$\boxed{\bar v = \frac{4 v_{max}}{5}} \longrightarrow \text{سرعت متوسط جریان توربولنت}$$

v_{max} چه سرعتیه؟ اینجا

که وسط لوله یعنی جایی که $r=0$ باشه

$$\iint_A v dA = \bar v A$$

حالا باید بدونیم $\bar v$ ها رو می‌تونیم بنویسیم $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ به شرطی که به جای v_1 و v_2 سرعت متوسط‌شون ($\bar v_1$ و $\bar v_2$) رو بذاریم.

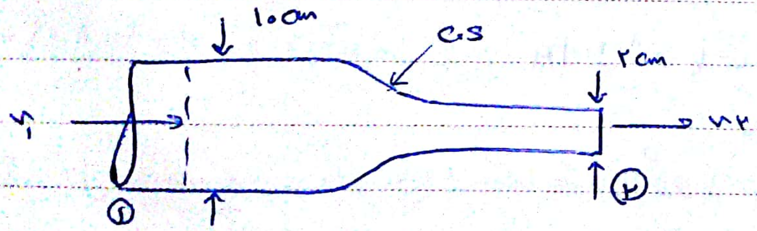
$$-\rho\iint_{A_1} v_1 dA_1 + \rho\iint_{A_2} v_2 dA_2 = 0$$

در این رابطه شرط ساده‌کننده‌ی سرعت یکنواخت در سطح مقطع را که دور از واقعیت است نداریم.

$$\boxed{\rho \bar v_1 A_1 = \rho \bar v_2 A_2}$$

معادله‌ی پیوستگی

مثال ـ جریان آب با سرعت یکنواخت $3 m/s$ به نازلی مطابق شکل وارد می‌شود. سرعت سیال را در خروجی نازل بیابید. شدت جریان حجمی چقدر است؟



$$\boxed{\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2}$$

که یک تیوب توخالی با قطر متغیر

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = 3\,\frac{\pi\times 0.1^2/4}{\pi\times 0.02^2/4}$$

$$Q = A_1 v_1 = 3\times\pi\times 0.1^2/4 = \boxed{0.0236\ m^3/s}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مایع ← هیچ سیالی رو نمیشه قابل تراکم و جرم ثابت در نظر گرفت:

مثال - یک تیوب خط 0.5 lbm/sec هوا دارد. در سطح مقطع ۱ آن، قطر 6in است و $t=60\,°F$, $P=40\,psia$ و در سطح مقطع ۲ آن، جایی که قطر 8in است: $P=30\,psia$, $t=80\,°F$ سرعت در هر سطح مقطع را بیابید.

در مورد هوا چون جرم ثابت نیست و یک سیال تراکم پذیر است، الزاماً با $PV=RT$، ρ رو حساب کنیم

$$PV=nRT \xrightarrow{m=\rho V} P\frac{m}{\rho}=\frac{m}{M}RT \rightarrow \rho=\frac{P}{RT}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho_1=\dfrac{P_1}{RT_1}=\dfrac{40\times 144}{53.3(460+60)}=0.208\ lbm/ft^3 \\ \rho_2=\dfrac{P_2}{RT_2}=\dfrac{30\times 144}{53.3(460+80)}=0.150\ lbm/ft^3 \end{cases}$$

$$v_1=\dot{m}/\rho_1 A_1 \longrightarrow v_1=\frac{0.5}{0.208\pi/16}=12.25\ ft/s$$

$$v_2=\dot{m}/\rho_2 A_2 \longrightarrow v_2=\frac{0.5}{0.150\pi/9}=9.56\ ft/s$$

۲- اندازه حرکت ← momentum $=mv=N$

معادله اندازه حرکت (قانون دوم نیوتن)

$$\rho=V \longleftarrow N=m$$

* طبق قانون دوم نیوتن داریم:

$$\Sigma F=\frac{D}{Dt}(mv)$$

$$\Sigma F=\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho v\,dv}_{\text{نرخ تجمع مومنتم}}+\underbrace{\int_{cs}\rho v(v\cdot\hat{n})\,dA}_{\text{نقل و انتقال}}$$

ΣF شامل: ← نیروهای وارد بر سطح (فشار، تنش برشی)
↙ نیروهای بدنه (وزن)

ΣF = net momentum afflux + Accumulation of momentum

Rate mass × velocity = Rate of momentum = Force

$$\text{momentum}=\overbrace{\left\{\int \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\right\}}^{\dot{m}\ \text{اسکالر}}\ \overset{\text{بردار}}{\vec{v}}$$

$$x\text{-direction}: \left\{\int \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA\right\}\vec{v}_x$$

⋮ ⋮

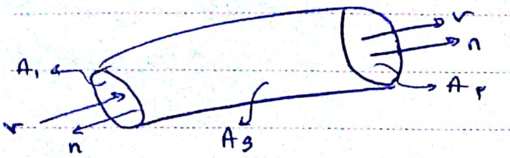
$$\sum F = \iint_{C.S} \rho(\hat{v}\cdot\hat{n})\frac{v}{g_c}\,dA + \frac{d}{dt}\left(\iiint_{CV}\rho\frac{\vec{v}}{g_c}\,dV\right)$$

تنش برداری است و در سه جهت x و y و z می‌توان آن را نوشت.

نیروی سطحی: ناشی از سیال است و در موقعیتی ایجاد می‌شود که سرعت و گرادیان آن وجود داشته باشد.

نیروی فشاری: در ورودی‌ها و خروجی‌های CV وارد می‌شود.

نیروی وزن: نیروی خارجی است و ربطی به سیال ندارد.



در حالت ساده یک CV را در نظر بگیرید که یک ورودی و خروجی دارد.

سرعت در سطوح یکنواخت و تجمع = 0

در حالت steady state

x_direction:

$$\sum F_x = \iint_{A_1}\rho(\hat{v}_1\cdot\hat{n})\frac{\vec{v}_{1x}}{g_c}dA_1 + \iint_{A_2}\rho(\hat{v}_2\cdot\hat{n})\frac{v_{2x}}{g_c}dA_2 + \iint_{A_3}\rho(\hat{v}_3\cdot\hat{n})\frac{v_{3x}}{g_c}dA_3$$

$$\sum F_x = \iint_{A_2}\rho v_2\frac{\vec{v}_{2x}}{g_c}dA_2 - \iint_{A_1}\rho v_1\frac{\vec{v}_{1x}}{g_c}dA_1$$

برای ساده شدن این رابطه، سرعت متوسط را تصحیح می‌کنیم.

(ρ = constant)

$$\rho\iint_A v\frac{\vec{v}_x}{g_c}dA = \underbrace{\beta}_{\text{ضریب تصحیح}}\rho\underbrace{\bar{v}}_{\text{سرعت متوسط}}\frac{\vec{v}_x}{g_c} \longrightarrow \beta\bar{v} \longrightarrow$$

تصحیح برای انتگرال سرعت.

$$\sum F_x = \beta_2\rho\bar{v}_{2x}\frac{v_2}{g_c}A_2 - \beta_1\rho\bar{v}_{1x}\frac{v_1}{g_c}A_1$$

معادله مومنتوم خطی

$$\dot{m} = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \longrightarrow \boxed{\sum F_x = \frac{\dot{m}}{g_c}\left(\underbrace{\beta_2\bar{v}_{2x}}_{\text{خروجی}} - \underbrace{\beta_1\bar{v}_{1x}}_{\text{ورودی}}\right)}$$

در حالت steady برای معادله اندازه حرکت

فصل سوم ← ۳

وقتی سرعت رو یکنواخت می‌گیریم ضریبی به اسم β نداریم. ولی می‌دونیم سرعت تو مقاطع یکنواخت نیست و پروفیل سرعت داریم. پس برای اینکه انتگرال نگیریم از ضریب تصحیح استفاده می‌کنیم تا جایگزین انتگرال بشه. در واقع با انتگرال داریم سرعت متوسط رو جایگزین سرعت واقعی می‌کنیم.

$$\beta = \frac{\iint_A v^2\,dA}{\bar{v}^2 A}$$

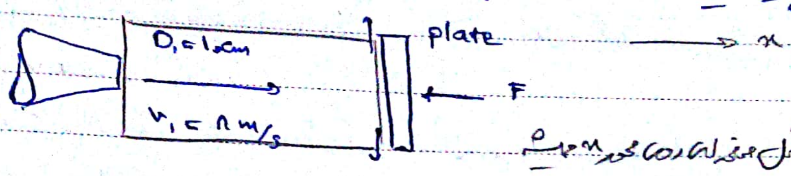
$$v = v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\right\} \Rightarrow \beta = ?$$

$$v = v_{max}\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)\right\}^{1/7} \Rightarrow \beta = ?$$

* در جریان درهم (توربولانت) و شبیه به سیالات غیرویسکوز مثل آب، ضریب تصحیح مومنتوم را با تقریب خوبی می توان معادل ۱ در نظر گرفت (۱.۰۱ : ۱.۰۵).

* برای جریان لمینار نیز می توان β را برای یک تیوب ساده $\beta = \frac{4}{3}$ گرفت.

مثال - یک جت آب با سرعت $8\,m/s$ پاشیده میشه. معلوم بنمایید که برای نگه داشتن این صفحه لازمه چه نیرویی؟



اول باید یک حجم کنترل فرض کنیم.
در درس دو صفحه ها شو مشخص کنیم.
سوال گفته از جانب محیط تر اکنم ← پس مثل صفحه ها رو محور x میشه
حل یک سوال.

$$\sum F_x = -F = \dot m_{up} U_{up} + \dot m_{down} U_{down} - \dot m_j u_j$$
$$= -\dot m_j u_j \quad , \quad \dot m_j = \rho A_j V_j$$

$$\Longrightarrow \quad F = \rho A_j V_j^2 = (998)\,\pi\,(0.05)^2\,(8)^2 \simeq \boxed{500\,N}$$

معادله‌ی بقای انرژی:

اگر معادله‌ی بقای انرژی رو نوشته شود، داریم:

$N = E = me$

قانون اول ترمودینامیک

$$\dot Q - \dot W = \frac{D}{Dt} E \qquad e = u + gz + \frac{V^2}{2}$$

حرارت منتقل شده — کار انجام شده

$$\dot Q - \dot W = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\,\rho\,dv + \int_{cs} \rho\, e\,(\hat V \cdot \hat n)\,dA$$

کار کلی شامل:
کار جریان (کار فشار حجم)
کار محوری (shaft)
کار ناشی از مرز متحرک (مثل تسمه یا لوله)
کار حرکت حجم کنترل نسبت به مختصات ثابت

$$\dot W = \int_{cs} p\,\hat n\, v\,dA + \dot W_s + \dot W_{shear} + \dot W_1 \qquad \rho V \cdot \hat n\, dA$$

$$\dot Q - \dot W_s - \dot W_{shear} - \dot W_1 = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\,\rho\,dv + \int_{cs}\left(e + \frac{P}{\rho}\right)$$

$\frac{E}{m} = e$

$$e = \frac{V_1^2}{2} + gz + u$$

$$\dot Q - \dot W_s - \dot W_{shear} - \dot W_1 =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz + u\right)\rho\,dv + \int_{cs}\left(\frac{V_1^2}{2} + gz + u + \frac{P}{\rho}\right)\rho\, V \cdot \hat n\, dA$$

جنبشی — پتانسیل — داخلی

این شکل کلی معادله‌ی انرژی است.

$$-\dot W_s - \dot W_{shear} - \dot W_1 =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho\, dv + \int_{cs}\left(\frac{v^2}{2}+gz+\frac{P}{\rho}\right)\rho\, v\cdot\hat n\, dA + losses$$

$$Losses = -\dot Q + \frac{d}{dt}\int_{cv} u\rho\, dv + \int_{cs} u\rho\, v\cdot\hat n\, dA$$ ← اتلاف انرژی

به دلیل اثر اصطکاک ناشی از ویسکوزیته که باعث اتلاف انرژی حرارتی یا انتقال گرما می‌شود.
تغییر حرارت ← این اتلاف ناشناخته‌اند

* جریان یکنواخت پایا (steady uniform flow):

جریان با زمان تغییر نمی‌کند.
یک ورودی و یک خروجی وجود دارد.
توزیع پارامترها در مقاطع یکسان است.

$$-\dot W_s = \rho_2 v_2 A_2\left(\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho_2}+gz_2\right)$$

$$-\rho_1 v_1 A_1\left(\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho_1}+gz_1\right)+losses$$

$W_1 = W_{shear} = 0$

اگر امکان انرژی صرف انتقال شود و کاری هم به سیال وارد نشود (یا از آن گرفته نشود) و سیال تراکم ناپذیر باشد، معادله برنولی بدست می‌آید:

$$\boxed{\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+z_2 = \frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+z_1}$$

معادله برنولی

شکلی از معادله‌ی انرژی است که جریان یکنواخت پایا داریم و اتلاف انرژی هم نداریم ← کار صفر، Q صفر، تقریباً تغییرات دما نداریم.

کجاها در طراحی چه جریان‌هایی کاربرد داره؟ جریان پایا، یکنواخت — کار و Q وجود ندارد، سیال ایده‌آل و μ نداریم، دما ثابت
توزیع پارامترها در سطح مقطع یکسان

Eule Equation →

بدست آوردن معادله‌ی برنولی با استفاده از یک حجم کنترل

فرضیات: ۱- سیال ایده‌آل: اتلاف انرژی نداریم و ویسکوزیته در محاسبات نقشی ندارد.
۲- سرعت در سطح مقطع ثابت است ← جریان یکنواخت
۳- انتقال جرم حالت دائمی steady state است.
۴- سیال غیرقابل تراکم است. $\dot m_{in} = \dot m_{out}$ معادله پیوستگی:
۵- دما ثابت است.
۶- حرکت در امتداد خطوط است.

$$\frac{dP}{\rho}+\frac{g}{g_c}dz+\frac{1}{g_c}u\,du = 0$$

$\frac{g}{g_c} : \frac{lbf}{lbm}$

dz, ft

Energy per mass unit : $\frac{g}{g_c}dz$

انتگرال

$$\boxed{\frac{P}{\rho}+\frac{g}{g_c}z+\frac{u^2}{2g_c} = Const}$$

معادله برنولی

$$-\dot{W}_s-\dot{W}_{shear}-\dot{W}_1=$$

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho\, dV+\int_{cs}\left(\frac{v^2}{2}+gz+\frac{P}{\rho}\right)\rho\, v\cdot\hat{n}\, dA+\text{losses}$$

$$\text{Losses}=-\dot{Q}+\frac{d}{dt}\int_{cv}u\rho\, dV+\int_{cs}u\rho\, v\cdot\hat{n}\, dA$$ ← اتلاف انرژی

← بر اثر اصطکاک ناشی از ویسکوزیته که باعث اتلاف انرژی به حالت حرارتی یا اشکال دیگر می‌شود.
← برگشت‌ناپذیر ← این انرژی‌ها ناکارآمد هستند

* جریان یکنواخت پایا (steady uniform flow):

جریان با زمان تغییر نمی‌کند.
یک ورودی و یک خروجی وجود دارد.
توزیع پارامترها در مقاطع یکسان است.

$$W_1=W_{shear}=0$$

$$-\dot{W}_s=\rho_2 v_2 A_2\left(\frac{v_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho_2}+gz_2\right)-\rho_1 v_1 A_1\left(\frac{v_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho_1}+gz_1\right)+\text{losses}$$

اگر اتلاف انرژی صرفاً تبدیل به گرما شود و کار محوری به سیال وارد نشود (یا از آن صرف نظر شود) و سیال تراکم‌ناپذیر باشد، معادله برنولی به دست می‌آید:

$$\boxed{\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+z_2=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+z_1}$$

معادله برنولی

شکلی از معادله انرژی است که جریان یکنواخت پایا داریم و اتلاف انرژی هم نداریم ← کار صفر، Q صفر، تقریباً تبعیت از زمان نداریم.

کجاها و برای چه جریان‌هایی کاربرد دارد؟ جریان پایا، یکنواخت ← کار و Q وجود ندارد، سیال تراکم‌ناپذیر و دما ثابت
← توزیع پارامترها در سطح مقطع یکسان

Eule Equation → بدست آوردن معادله برنولی با استفاده از یک حجم کنترل

فرضیات: ۱- سیال ایده‌آل: اتلاف انرژی نداریم و ویسکوزیته در محاسبات نقشی ندارد.
۲- سرعت در سطح مقطع ثابت است ← جریان یکنواخت
۳- از نظر زمانی در حالت دائمی steady state است.
۴- سیال غیرقابل تراکم است. $\dot{m}_{in}=\dot{m}_{out}$: معادله پیوستگی
۵- دما ثابت است.
۶- حرکت در امتداد خطوط است.

$$\frac{dP}{\rho}+\frac{g}{g_c}dz+\frac{1}{g_c}u\,du=0$$

$\frac{g}{g_c}:\frac{lb_f}{lb_m}$, dz, ft } Energy per mass unit : $\frac{g}{g_c}dz$

انتگرال →

$$\boxed{\frac{P}{\rho}+\frac{g}{g_c}z+\frac{u^2}{2g_c}=Const}$$

معادله برنولی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

m^2/s^2 $\quad \frac{u_1^2}{2}+gz_1+\frac{P_1}{\rho}=\frac{u_2^2}{2}+gz_2+\frac{P_2}{\rho}$ واحد همه جملات m^2/s^2 اند.

انرژی های ورودی — انرژی های خروجی

energy per unit mass (جرم) $\longrightarrow$ $kg\frac{m}{s^2}$ | $lb_m \frac{ft}{s^2}$ واحد معادله برنولی

energy per وزن $\longleftarrow$ Head of fluid اگر رابطه بالا را بر g تقسیم کنیم واحد همه جملات بر حسب طول اند.

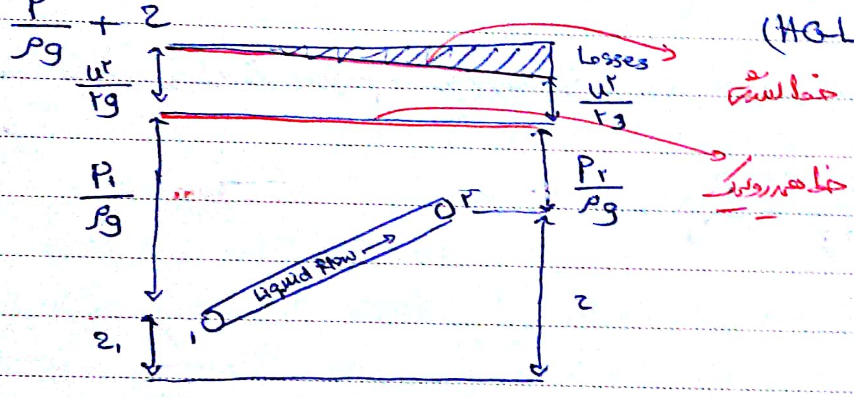
$$\frac{u_1^2}{2g}+\underbrace{z_1}_{\text{طول}}+\frac{P_1}{\rho g}=\frac{u_2^2}{2g}+\underbrace{z_2}_{\text{طول}}+\frac{P_2}{\rho g}=H$$

$\frac{m^2/s^2}{m/s^2}$

هد کل = هد فشار + هد الاستاتیک (ارتفاع) + هد سرعت

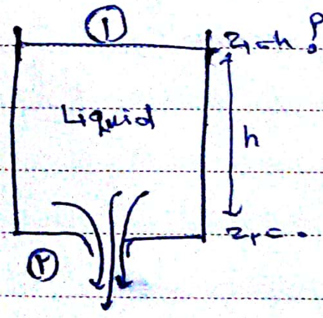
$$\frac{P}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+z=H=\text{constant}$$ (EGL) ← خط انرژی

$$\frac{P}{\rho g}+z$$ (HGL) ← خط هیدرولیک



مقدار سرعت را از خط انرژی کم کنیم میشه خط هیدرولیک.

مثال: مخزنی با ارتفاع H که با [illegible] ایجاد شده، سرعت خروج سیال از شیر چقدر است؟



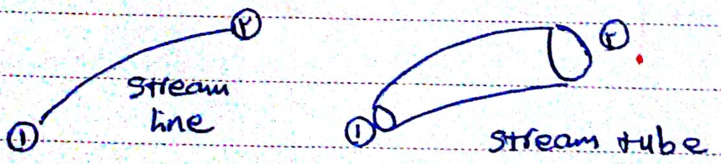
$$\cancel{\frac{u_1^2}{2}}^{\,0}+gh+\frac{P_1}{\rho}=\frac{u_2^2}{2}+0+\frac{P_2}{\rho}$$

در سطح آزاد فشارها اتمسفری است.

$$\boxed{u_2=\sqrt{2gh}}$$

سرعت در سطح مخزن را صفر در نظر میگیریم چون حجم مخزن بزرگ است نسبت به لوله که تغییرات سرعت ناچیز است.

طبق معادله برنولی: مجموع انرژی های جنبشی، فشاری و پتانسیل (در هر نقطه از مسیر / در خط) همواره مقداری ثابت است.

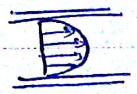


PAPCO

Year. Month. Date. ( )

وقتی سرعت یکنواخت نیست، به جای سرعت، سرعت متوسط و یک ضریب تصحیح α قرار می‌دهیم:

معادله برنولی در یک لوله واقعی با سیال حقیقی:

جایی که دیواره داریم مثل لوله‌ها و کانال‌ها سرعت با یک پروفیل تغییر می‌کند 

در سیال غیرایده‌آل اصطکاک وجود دارد و در اینجا سرعت در سطح مقطع نمی‌تواند ثابت باقی بماند.

* از ضریب تصحیح α استفاده می‌کنیم که اگر در سرعت متوسط ضرب شود، مقدار انرژی جنبشی که منتقل می‌شود با انرژی جنبشی که توسط سرعت واقعی منتقل می‌شود برابر خواهد بود.

معادله یک لوله بدون اتلاف انرژی داریم:

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_1+\alpha_1\frac{\bar{v}_1^2}{2g_c}=\frac{P_2}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_2+\alpha_2\frac{\bar{v}_2^2}{2g_c}$$

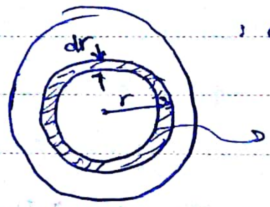
معادله انرژی با در نظر گرفتن اتلاف:

$$\boxed{\underbrace{\eta}_{\text{بازده پمپ}}\underbrace{W_p}_{\text{کار پمپ}}+\frac{P_1}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_1+\alpha_1\frac{\bar{v}_1^2}{2g_c}=\frac{P_2}{\rho}+\frac{g}{g_c}z_2+\alpha_2\frac{\bar{v}_2^2}{2g_c}+H_f}$$

H_f → اتلاف

محاسبه ضریب تصحیح انرژی جنبشی α:

$$\left.\begin{aligned}dE_k&=d\dot m\,\frac{u^2}{2g_c}\\ d\dot m&=\rho u\,dA\end{aligned}\right\}\quad dE_k=\frac{\rho u^3 dA}{2g_c}$$



$dA=2\pi r\,dr$

$$E_k=\int dE_k=\int_A\frac{\rho u^3 dA}{2g}$$

$$\bar{E}_k=\dot m\frac{\bar{v}^2}{2g_c}=\frac{\rho\bar{v}^3A}{2g_c}$$

$$E_k=\alpha\bar{E}_k$$

$$\int_A\frac{\rho u^3 dA}{2g_c}=\frac{\alpha\rho\bar{v}^3A}{2g_c}\Longrightarrow\boxed{\alpha=\frac{\int u^3 dA}{\bar{v}^3A}}$$

* ضریب تصحیح انرژی جنبشی را در جریان درهم که پروفایل سرعت به سرعت یکنواخت در سطح مقطع نزدیک است را می‌توان یک گرفت.

معادله جریان لمینار می‌توان $\alpha=2$ در نظر گرفت

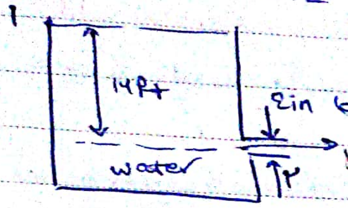
* اگر سیستم انگلیسی اگر واحد جرم slug باشد، $g_c=1$ فرض می‌شه
" " " اگر واحد جرم lb_m باشد، $g_c=32.174$ فرض می‌شه.

Head: $g_c=1$

$$\boxed{z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+\underbrace{E_p}_{\text{هد پمپ}}=z_2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+\text{losses}_{1-2}}$$

Year. Month. Date. ( )

مثال: لوله ای در انتهای مخزن در ارتفاع 16 ft یک مخزن باز است. سرعت خروج سیال و سرعت (دبی حجمی)؟



اتلاف نداریم. کار پمپ هم نداریم.

$$\frac{P_1}{\rho g}+z_1+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho g}+z_2+\frac{V_2^2}{2g}$$

فشار اتمسفر دو نقطه ، V آزاد = 0 ، سطح مخزن ، محیط آزاد

$$z_1=\frac{V_2^2}{2g}\longrightarrow H=\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow V_2=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times32.2\times16}=\boxed{32.08\ ft/sec}$$ سرعت خروج سیال

$$\dot Q=VA=32.08\times\frac{\pi}{4}(4)^2\ [m^3/s]$$

⚠ افزایش یا برونده انرژی سیال را از طریق Head حساب می کنیم

در صورت وجود پمپ و توربین:

$$\boxed{h_p+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+\frac{P_1}{\rho g}=h_T+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f}$$

هد پمپ جایی که داره انرژی رو تولید می کنه ، هد توربین جایی که داره انرژی مصرف میشه ، اتلاف انرژی

اتلاف انرژی ←

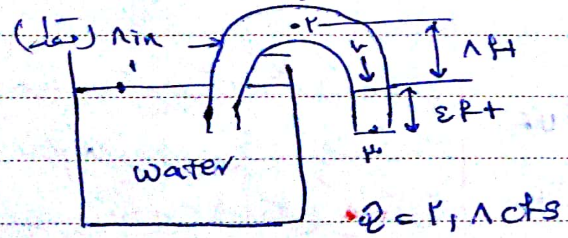
ضریب اتلاف انرژی $h_f=k\frac{V^2}{2g}$ * و $k\longrightarrow$ برای مواد مختلف در جدول اعدادش هست.

* $\dot W_T=\rho g h_T Q\eta_T=\gamma Q h\eta$ (راندمان) ← کار توربین بر حسب راندمان

و $\dot W_p=\rho g h_p Q/\eta_p$

مثال: ضریب اتلاف انرژی را از نقطه 1 تا نقطه 3 بدست بیاورید. (بر حسب هد سرعت) اتلاف بر حسب $\frac{V_3^2}{2g}$

فشار در نقطه 2 را در صورتی که دو سوم اتلاف بین نقطه 1 و 2 رخ دهد، محاسبه کنید.



$\dot Q=2.8\ cfs$

اتلاف بین نقطه 1 و 3:

$$\cancel{h_p}+\cancel{\frac{V_1^2}{2g}}+\cancel{\frac{P_1}{\gamma}}+\cancel{z_1}=\cancel{h_T}+\frac{V_3^2}{2g}+\cancel{\frac{P_3}{\gamma}}+z_3+h_f$$

$z_3=-4$ ، $h_f=k\frac{V_3^2}{2g}$

$$\Rightarrow k\frac{V_3^2}{2g}=4-\frac{V_3^2}{2g}\quad (*)$$

V3 را از طریق Q حساب می کنیم

$$\dot Q_3=V_3A\Rightarrow 2.8=V_3\times\frac{\pi}{4}\left(8in\times\frac{1ft}{12in}\right)^2$$

$$\Rightarrow V_3=8.02\ ft/s$$

جایگذاری در (*) $\Rightarrow k\frac{(8.02)^2}{2g}=4-\frac{(8.02)^2}{2g}\longrightarrow k=3\Rightarrow\boxed{h_f=3V_3^2/2g}$

فشار در نقطه 2:

$$h_{f_{1-2}}=\frac{2}{3}h_{f_{1-3}}=\frac{2}{3}\times3\frac{V_3^2}{2g}=2V_3^2/2g$$

$$\cancel{h_p}+\frac{\cancel{V_1^2}}{2g}+\cancel{z_1}+\frac{\cancel{P_1}}{\gamma}=\cancel{h_T}+\frac{V_2^2}{2g}+\underbrace{z_2}_{+8}+\frac{P_2}{\gamma}+\underbrace{h_{f_{1-2}}}_{6\frac{V_3^2}{2g}}$$

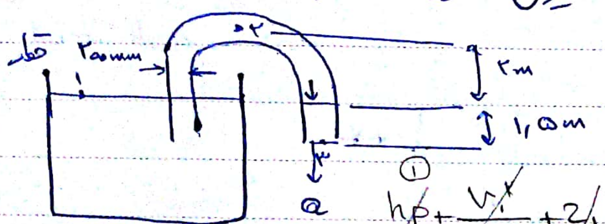
$$P_2=\gamma\left(\frac{V_2^2}{2g}-8-\frac{6V_3^2}{2g}\right)$$

سرعت در نقطه ی ۲ رو چطور میشه محاسبه کرد؟

از قانون بقای جرم : $\dot m_2=\dot m_3\ ,\ \dot Q_2=\dot Q_3 \longrightarrow V_2A=V_3A \Longrightarrow V_2=V_3$

$$\Longrightarrow P_2=\gamma\left(\frac{V_3^2}{2g}-8-\frac{6V_3^2}{2g}\right)=\boxed{\gamma\left(-8-\frac{5V_3^2}{2g}\right)}$$

مثال - برای سیفون شکل قبل، در صورتیکه $Q=150\ L/s$ میزان فاکتور افت (K) و فشار در نقطه ی ۲ را بیابید. افت بین ۱ و ۲، $\frac{2}{3}$ افت تمام کل است.



$$\cancel{h_p}+\frac{\cancel{V_1^2}}{2g}+\cancel{z_1}+\frac{\cancel{P_1}}{\gamma}=\cancel{h_T}+\frac{V_3^2}{2g}+\underbrace{z_3}_{-1.5}+\frac{\cancel{P_3}}{\gamma}+\underbrace{h_f}_{\frac{kV_3^2}{2g}}$$

$$\frac{kV_3^2}{2g}=1.5-V_3^2/2g \Longrightarrow (k+1)\frac{V_3^2}{2g}=1.5 \Longrightarrow \boxed{k=0.29}$$

$$\dot Q=VA \Rightarrow \dot Q=150\ L/s\times\frac{1\,m^3}{1000\,L}=\frac{\pi}{4}\left(200\times10^{-3}\right)^2\times V_3 \longrightarrow V_3=4.77$$

①

$$\cancel{h_p}+\frac{\cancel{V_1^2}}{2g}+\cancel{z_1}+\frac{\cancel{P_1}}{\gamma}=\cancel{h_T}+\frac{V_2^2}{2g}+\underbrace{z_2}_{2}+\frac{P_2}{\gamma}+h_f$$

$$h_{1-2}=2h_{1-3}=2k\frac{V_3^2}{2g}$$

$$\Longrightarrow P_2=\gamma\left(-\frac{V_2^2}{2g}-2-2k\frac{V_3^2}{2g}\right)$$

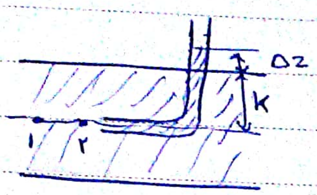
$$\xrightarrow{V_2=V_3} P_2=9790\left(-\frac{(4.77)^2}{2(9.81)}-2-2(0.29)\frac{(4.77)^2}{2(9.81)}\right)=-3.39$$

تایید

(مثال ۳-۷ استریتر)

Subject :
Year . Month . Date . ( )

؟ عجب سوالی ؟



مثال - یک لوله ی پیتوت (که برای اندازه گیری سرعت استفاده میشه) داریم. از انتهای مصرف قرار شده.

چون سرعت نقطه ی ۲ صفره

لوله ی پیتوت رو وارد دادیم
جریان رو متوقف کرد
ارتفاع آبی که در لوله بالا میاد، سرعت جریان بدست میاد.

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+0=0+\frac{P_2}{\gamma}+0$$

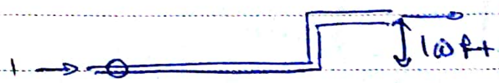
$$P_1=\rho g k \quad , \quad P_2=\rho g(k+\Delta Z)$$

$$\Longrightarrow \frac{v_1^2}{2g}+k=k+\Delta Z \longrightarrow \frac{v_1^2}{2g}=\Delta Z \Longrightarrow \boxed{v_1=\sqrt{2g\Delta Z}}$$

مثال - اگر قدرت پمپ ۱۰ اسب بخار و قطر لوله 4.67 in و هد اتلاف ۸ برابر هد سرعت باشد، دبی جریان و خط انرژی و هیدرولیک را بدست آورید. مساله ۳۶ کتاب

$$W/t=\gamma Q h$$

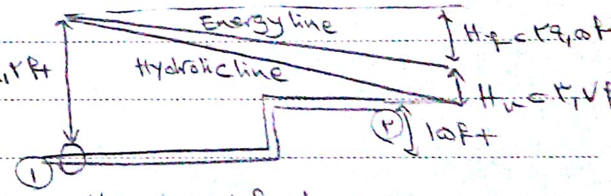
$$W(hp)=\gamma Q h/550$$



$$h_p+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=h_T+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+h_f$$

$$h_p=\frac{v_2^2}{2g}+15+8\frac{v_2^2}{2g}$$

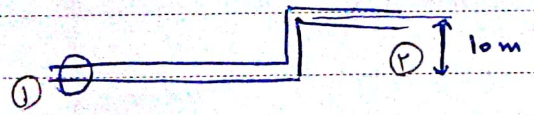
هد پمپ بخار(داده)



$$10\,hp\times550=9790\times V_2\left(\frac{\pi}{4}\left(4.67\times\frac{1ft}{12in}\right)^2\right)$$

$$H_p=h_v+h_f+h_z$$

مثال - لوله ی شکل زیر دبی $0.0053\ m^3/s$ روغن با $S=0.92$ را پمپ میکند. قبل از پمپ فشار $-35\ kN/m^2$ است. بعد از پمپ فشار $550\ kN/m^2$. فاصله ای که می خواد تامین کنه ۱۰ متره. قطر ورودی $0.05\ m$ و خروجی $0.074\ m$. راندمان پمپ اگر ۷۵ درصد باشد، قدرت پمپ را حساب کنید.



$$h_p+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=h_T+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2+h_f$$

$$\frac{P_1}{\gamma}=\frac{-35}{0.92\times9790} \qquad \frac{P_2}{\gamma}=\frac{550}{0.92\times9790} \qquad z_2=10\,m$$

$$h_p+\frac{v_1^2}{2g}-\frac{35\times10^3}{0.92\times9790}=\frac{550\times10^3}{0.92\times9790}+\frac{v_2^2}{2g}+10$$

$$Q=\bar{V}A \longrightarrow Q_1=V_1\times\frac{\pi}{4}(0.05)^2=0.0053\,m^3/s \Longrightarrow V_1=2.7\,m/s$$

$$Q_2=V_2\times\frac{\pi}{4}(0.074)^2=0.0053\,m^3/s \Longrightarrow V_2=1.23\,m/s$$

PAPCO

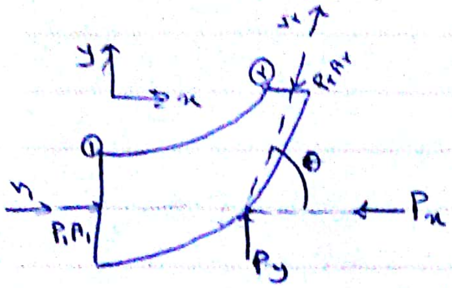
$$h_p + \frac{(3.7)^2}{2(9.81)} - \frac{35\times10^3}{0.92\times9790} = \frac{550\times10^3}{0.92\times9790} + \frac{(1.33)^2}{2(9.81)} + 10$$

$$\longrightarrow \boxed{h_p = 74.467\ m}$$

$$\dot W_p = \gamma h_p Q/\eta \longrightarrow \dot W_p = 9790\times0.92\times74.65\times0.0053/0.75 = 4751.3\ \ \frac{Nm}{s}=\frac{J}{s}$$

* روابطی که به ما در حل مسائل کمک میکند: بقای جرم - اندازه حرکت - بقای انرژی

مثال - جریانی که وارد و خارج یک بیتوب یا مخزن میشه به بدنه نیرو وارد میکنه. (مثل شلنگ آب که میخوایم حرکت کنه)
چه نیروی به بدنه شکل زیر وارد میشه؟
$D_1 = 20ft$ و $V_1 = 50 ft/s$ و $P_1 = 40 psi$ و $D_2 = 14 ft$ و اتلاف نداریم.



معادلاتی که نیرو رو میخواد معادله مومنتومه.

$\dot Q = VA$

$\dot Q = V_1A_1 = 15710$ طبق قانون پیوستگی

$V_2 = Q/A_2 = 78.1\ ft$ فرض کنید اختلاف ارتفاع ناچیزه و اتلاف نداریم.

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + \cancel{h_p} = \cancel{h_T} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{h_L}$$

$$z_1 = z_2 \quad \frac{(50)^2}{64.4} + \frac{40}{0.433} = \frac{(78.1)^2}{64.4} + \frac{P_2}{0.433} \longrightarrow \boxed{P_2 = 15.8\ psi}$$

lbm/ft^2

قانون بالانس مومنتوم خطی:

$$P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta - P_x = \overbrace{\rho Q}^{\dot m}\overbrace{(V_2\cos\theta - V_1)}^{(V_2-V_1)}$$

or

$$40\times144\times100\pi - 15.8\times144\times49\pi\times0.5 - P_x = 1.935\times15710(78.1\times0.5-50)$$

$$\longrightarrow \boxed{P_x = 1,915,000\ lb}$$

$$P_y - P_2A_2\sin\theta = \rho Q(V_2\sin\theta) \longrightarrow \boxed{P_y = 2,453,000\ lb}$$

$$\longrightarrow \boxed{P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}\ \ \checkmark}$$

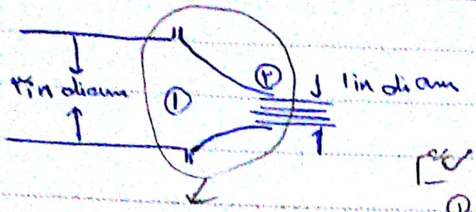
$\boxed{psi \times 144}$ ← واحد فشار وقتی که در رابطه انرژی بنویسیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مساله ۱۳-۳ کتاب

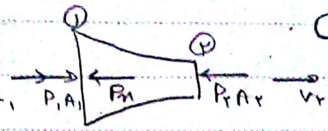
نازل

مثال - چه نیرویی از طرف نازل که جریان داده شده بر آن وارد می‌شود؟



چه نیرویی به لبه‌ها وارد می‌شود؟

معادله پیوستگی $V_1A_1=V_2A_2$ را می‌نویسیم. مجهول زیاد داریم پس می‌رویم سراغ معادله دیگر ← معادله انرژی برای حجم کنترل.



هر جا که به محیط سیال رها می‌شود فشار نسبی صفر است پس اینجا $P_2=0$.

از اتلاف صرف‌نظر شده. سیال روغن است با وزن مخصوص ۰٫۸۵ و $P_1=100\ psi$

$$z_1+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{100\times144}{0.85\times0.433}=z_2+\frac{V_2^2}{2g}+0$$

$0.433 \rightarrow 62.4$

تبدیل psi به $\frac{lbm}{ft^2}$

۰٫۴۳۳ از کجا آمده؟ که ... ضرب در ۱۴۴ ...؟

$z_1=z_2\ ,\quad V_2=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2V_1=9V_1$ معادله پیوستگی

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{100}{0.85\times0.433}=\frac{(9V_1)^2}{2g}\Longrightarrow V_1=14.78\ ft/s\ ,\quad V_2=133\ ft/s$$

طبق مومنتوم خطی برای حجم کنترل نیرو:

$$100\frac{\pi}{4}9-P_x=\rho Q(V_2-V_1)$$

$Q = 0.725$

$$\Rightarrow 100\,\pi/4\,9-P_x=1.935\times0.85\times0.725(133-14.78)\longrightarrow \boxed{P_x=565.16}$$

$Q=2\ cfs$, water,

شتاب

$$a = \frac{dv}{dt} \quad , \quad v = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$$

$$* \; v = v(x, y, z, t) \longrightarrow dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

سرعت رو تابع زمان و مکان دیدیم ← سیستم اویلری

$$\Longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\longrightarrow a = v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

مولفه‌های شتاب در سه جهت : مختصات کارتزین

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\vdots$$

مشتق کلی یا مادی

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v$$

شتاب محلی — اگر استیدی باشه یعنی به زمان وابسته نباشه صفر میشه

شتاب جابجایی

$$\frac{D}{Dt} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

تمرین :

$$v = 3t\hat{i} + xz\hat{j} + ty^2 \hat{k} \longrightarrow a = ?$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} = (3\hat{i} + y^2\hat{k}) + 3tz j + 2txyz\hat{k} + txy\hat{j}$$

$$= \boxed{3i + (3tz + txy^2) j + (y^2 + 2txyz) k}$$

در مختصات استوانه‌ای ←

$$\frac{D}{Dt} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}$$

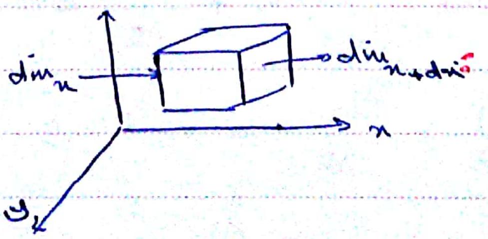
$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$dm_x = \rho v_x \, dy \, dz$$

$$dm_y = \rho v_y \, dx \, dz$$

$$dm_z = \rho v_z \, dx \, dy$$



فرض تغییرات شکلی معادله پیوستگی

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0}$$

تغییر جرم داخل حجم

تراکم پذیری

قانون پیوستگی برای المانی که حجمش به سمت صفر میل کرده ← قانون پیوستگی برای یک نقطه

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \longrightarrow$$

اپراتور دل

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

دیورژانس ← یعنی F برداره و $\nabla . F = \operatorname{div} F$ ، شار دبی خروجی از واحد حجم را در دستگاه مختصات بررسی می‌کنه.
گرادیان ← یعنی F اسکالره $\nabla F = \operatorname{grad} F$ ،

معادله پیوستگی :

$$* \quad \rho \nabla v + v . \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

میزان شار رو از واحد حجم می‌گیره ← دیورژانس

$$* \quad \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla . v = 0} \longrightarrow \text{اصل بقای جرم}$$

$$\rho = Cte \longrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \longrightarrow \nabla . v = 0 \quad or \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$
شکل تانسوری

سیال تراکم ناپذیر : ← ρ ثابت است $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

دیورژانس v

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla . \vec{v} = 0$$

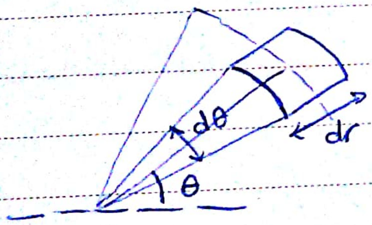
جریان steady state :
← یعنی نسبت به زمان تغییرات نداریم $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla . \rho \vec{v} = 0$$

تمرین : آیا این رابطه در قانون پیوستگی صدق می‌کند؟

$$v = (10xyt + 2)\, i + (-5y^2 t + 2 + 3y)\, j + (-3z + xt)\, k$$

مختصات استوانه‌ای ← معادله پیوستگی :



$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

اپراتور دل : $\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

معادله کلی پیوستگی : $\boxed{\nabla . \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

سیال غیر تراکم پذیر

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla . \vec{v} = 0$$

جریان steady flow ،

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = \nabla . \rho \vec{v} = 0$$

۷ اردیبهشت ۹۹

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \leftarrow \text{Two Dimentinal flow}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \leftarrow \text{stream function}$$

مختصات استوانه ای :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \\[2ex] v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad v_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad \leftarrow \text{stream function } \psi(r,\theta)$$

بردار سرعت برحسب بردارها یکه نوشته می شود :

$$v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi$$

کارتزین

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

استوانه ای

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

کروی

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

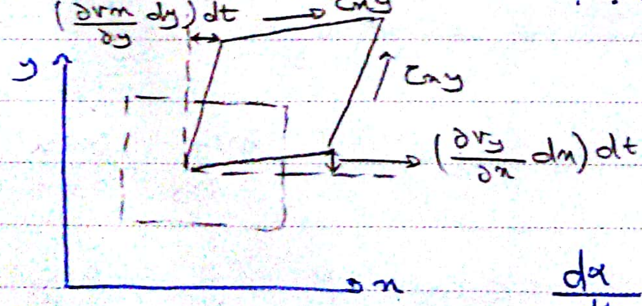
روابط مومنتوم :

τ_{xy} → جهت تنش

سطحی که تنش بر آن اثر میکند

انواع حرکت ← انتقالی ، چرخشی ، برشی ← شکلش عوض میشه و زاویه تغییر میکنه .

سیالی رو در نظر بگیر که هم جابجا شده هم تنش برشی (باعث شده شکلش) رو عوض کرده . میخوایم تنش‌های وارد بهش رو برحسب سرعت بدست بیاریم ← در واقع تنش‌هایی که از طرف سیال به جسم وارد شده و باعث تغییر شکل جسم شده رو میخوایم محاسبه کنیم .



$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

سیال نیوتنی : $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\dfrac{d\alpha}{dt} = \mu\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right)$

جهت x ← نیروی بدنی حجم : نیروی وزن : $\rho g_x\,dx\,dy\,dz$

سطح جلویی :

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dz\,dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy$$

سطح عقبی :

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dz\,dy + \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz + \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy$$

$$* \boxed{\rho\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x} \Leftarrow \sum F_x = m a_x \leftarrow$$ قانون دوم نیوتن

در جهت y و z هم داریم :

$$* \rho\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$* \rho\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx} \longrightarrow$$ در سیالات داریم

که پس ساده شده ی معادلات بالا :

گرادیان فشار

گرادیان

$$\boxed{\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\tau + \rho g} \rightarrow$$ نیروی جاذبه بر واحد حجم سیال

جرم سیال در واحد حجم ضرب در شتاب — نیروی فشار بر واحد حجم سیال — نیروی ویسکوز بر واحد حجم سیال

تعریف تنش ها بر اساس تغییرات سرعت :

سیال نیوتنی (μ ثابت) :

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)$$

$$\tau_{xy} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)$$

تقریبا صفر برای سیال تراکم ناپذیر

$$\tau_{zz} = -2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)$$

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

وقتی سیال نیوتنی و μ ثابت باشد معادله نویر استوکس بدست می آید

$$\boxed{\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + \rho g} \longleftarrow \nabla\cdot v = 0$$ در صورتیکه سیال تراکم ناپذیر باشد

معادله حرکت برای سیال نیوتنی با ویسکوزیته و دانسیته ثابت (Navier Stokes)

(مستقل از دستگاه مختصات خاص)

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho g$$ → معادله حرکت برای سیال ایده‌آل با ویسکوزیته صفر و دانسیته ثابت (شکل دیفرانسیلی معادلات).

بین ma معادل قانون دوم

شکل باز شده‌ی معادلات نویراستوکس :

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

⋮

اسلاید ۴۲ ← chapter 4m ← معادلات نویراستوکس در دستگاه‌های مختلف

* سیالی که گرادیان فشار (اختلاف فشار) باعث حرکتش بشه ← جریان پوازول — poiseuille flow
* سیالی که حرکت تیغه یا دو صفحه باعث حرکتش بشه ← جریان کوئت — couette flow

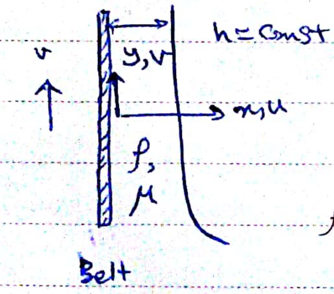
جمع‌بندی :

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \quad *$$

⋮

مثال ← تسمه‌ای عمودی با سرعت V به سمت بالا حرکت می‌کند. لایه‌ای روغن با ضخامت h روی این تسمه است. روغن سیالی ویسکوز است. نزدیک این تسمه شرایط no-slip داریم یعنی عدم لغزش داریم. یعنی ذرات سیال به صفحه می‌چسبن یعنی مانند روی سطح صفحه نمی‌لغزه. فرض کنید سرعت V تنها تابع x است. در ناحیه‌ای که سمت خارجی روغن است. (سطح آزاد روغن) تنش برشی صفر و h ثابته.

پروفیل سرعت و سرعت متوسط ؟



همه‌ی ترم‌های معادله‌ی پیوستگی رو چک کردیم که صفره ← می‌ریم سراغ معادله‌ی مومنتوم

$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\cancel{\frac{\partial P}{\partial y}}^{0} - \rho g + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

اختلاف فشار نداریم

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \xrightarrow{\text{دوبار انتگرال می‌گیریم}} \frac{dv}{dx} = \frac{\rho g x}{\mu} + c_1$$

انتگرال دوم → $v = \frac{\rho g}{\mu}\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$

(شرایط مرزی) داریم : $x = 0$, $v = V$, $x = h$, $\tau = 0 = \mu\left(\frac{dv}{dx}\right)$

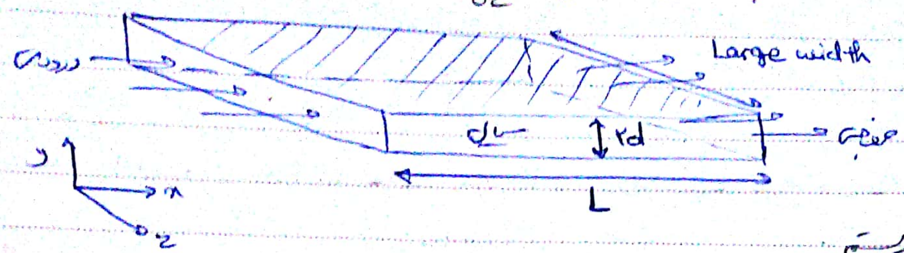
c_1 بدست میاد

$V = c_2$ ← c_2 هم بدست میاد — $c_1 = -\rho g h/\mu$

$$\Rightarrow \boxed{v = V - \frac{\rho g h}{\mu}x + \frac{\rho g}{2\mu}x^2}$$

$$V_{ave} = \frac{1}{h}\int_0^h v(x)\,dx = \frac{1}{h}\left[Vx - \frac{\rho g h x^2}{2\mu} + \rho g \frac{x^3}{6\mu}\right]_0^h = V - \frac{\rho g h^2}{3\mu}$$

مثال: مسأله جریان سیال ویسکوز با μ که در جهت x بین دو صفحه موازی مستطیلی عریض که عرض زیادی در جهت z دارند.
در جهت y. (یعنی فرض می‌کنیم در جهت z تغییرات نداریم $\frac{\partial}{\partial z}=0$)



شرایط: جریان سیال
ولی فاصله بین دو صفحه
دو صفحه

$v_y = v_z = 0$

باید معادله‌ی پیوستگی و مومنتوم رو بنویسیم

جریان استوار یعنی $\frac{\partial}{\partial t}=0$، پیوسته است پس همه معادلات غیر استوار کنار گذاشته. جریان fully developed
یعنی در طول جهت مشخص تغییرات ندارد یعنی اگر در جهت x فاصله دور شدیم با هم در هر نقطه در x برابر شرایط یکسان
مرزی noslip یعنی سرعت سیال با سرعت صفحه برابره

معادله پیوستگی: $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \longrightarrow v_x = v_x(y)$$ سرعت در راستای z که گفتیم تغییرات ندارد

الان که گفتیم در راستای x تغییرات ندارد پس فقط تابع y ه.

استوار

قانون مومنتوم: $$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}\right) + \cancel{\rho g_x}$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_y\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_z\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right) + \rho g_y$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \cancel{\rho g_z}$$

$$\xrightarrow[g_y=-g,\; g_x=g_z=0]{v_y=v_z=0} \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \Longrightarrow \int \frac{d^2 v_x}{dy^2}dy = \int \frac{d}{dy}\left(\frac{dv_x}{dy}\right)dy = \int \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)dy$$

$\partial v_x/\partial x = 0$

$$\Longrightarrow \frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)y + C_1$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال دوم}} v_x = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

شرایط مرزی $\left|\begin{array}{l} y=0 \\ \frac{dv_x}{dy}=0 \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{l} y=d \\ v_x=0 \end{array}\right. \Longrightarrow C_1=0 \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)d^2$

$$\Longrightarrow v_x = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)(d^2-y^2)$$

دبی حجمی $= Q = \int_0^Q dQ = \int_{-d}^{d} v_x\,dy = \int_{-d}^{d}\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)(d^2-y^2)dy = \frac{2d^3}{3\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)$

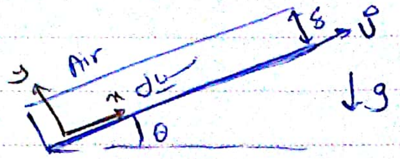
$$\boxed{v_{xm} = \frac{Q}{2d} = \frac{d^2}{3\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \longrightarrow \text{سرعت متوسط}$$

A

PAPCO

Subject: اسلاید ۵۸ – chapter 2m صفحه ۶ دقیقه ۵ از ۱:۱۸:۱۵
Year. Month. Date. ( )

صفحه ای با افق زاویه θ می‌سازد و با سرعت U به سمت بالا حرکت می‌کند و سیالی روی آن به ضخامت δ حمل می‌کند. جریان دائمی است. اگر ضخامت لایه‌ی سیال ثابت باشد، پروفیل سرعت چگونه است؟



فرضیات: $\partial v_x / \partial z = 0$ و $v_z = 0$

$v_y = v_z = 0$

جریان استاتیک $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \longrightarrow v_x = v(y)$$

حالا در جهت x و y روابط مومنتوم را می‌نویسیم

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right) + \rho g_y$$

$g_x = -g\sin\theta \quad , \quad g_y = -g\cos\theta$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\theta = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\theta$$

انتگرال

$$\frac{d v_x}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} y + \rho g \sin\theta\, y\right) + C_1 \longrightarrow \begin{cases} y = \delta \\ \mu \frac{d v_x}{dy} = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_x = \checkmark$$

معادله اویلر:

در صورتی که سیال ایده‌آل داشته باشیم یعنی تنش برشی صفر داشته باشد و جریان نیز غیرویسکوز باشد، از معادله‌ی ناویر استوکس، معادله‌ی اویلر به دست می‌آید.

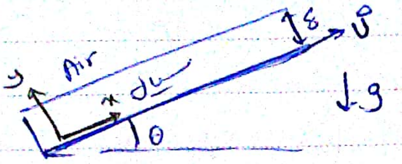
$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \rho g} \longrightarrow \text{رابطه اویلر}$$

$$\xrightarrow{\text{جهت } x} \rho \frac{D v_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

در صورتی که دانسیته ثابت و حالت استاتیکی داشته باشیم با انتگرال گرفتن از معادله اویلر، معادله‌ی برنولی حاصل می‌شود.

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho g z = C} \longrightarrow \text{رابطه برنولی}$$

صفحه ای با افق زاویه θ می سازد و با سرعت U به سمت بالا حرکت می کند و سیالی روی آن همزمان حمل می کند. جریان آرام است. اگر ضخامت لایه سیال ثابت باشد. توزیع سرعت چگونه است؟



فرضیات: $\partial u_x/\partial z = 0$ و $v_z = 0$

$v_y = v_z = 0$

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ جریان دائمی

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \longrightarrow v_x = v(y)$$

حالا در جهت x و y روابط مومنتوم را می نویسیم

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + \cancel{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + \cancel{v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}} + \cancel{v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right) + \rho g_y$$

$g_x = -g\sin\theta \quad , \quad g_y = -g\cos\theta$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\theta = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g\cos\theta$$

انتگرال

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} y + \rho g \sin\theta\, y\right) + C_1 \longrightarrow \left| \begin{array}{l} y = \delta \\ \mu \frac{dv_x}{dy} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow v_x = \checkmark$$

معادله اویلر:

در صورتی که سیال ایده آل داشته باشیم یعنی تنش برشی صفر داشته باشد و جریان نیز غیر ویسکوز باشد، از معادلات ناویر استوکس، معادله اویلر به دست می آید.

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g}} \longrightarrow \text{رابطه اویلر}$$

$$\xrightarrow{\text{جهت } x} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

در صورتی که دانسیته ثابت و حالت استاتیک داشته باشیم با انتگرال گرفتن از معادله اویلر، معادله برنولی حاصل می شود.

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho g z = C} \longrightarrow \text{رابطه برنولی}$$

Sub
Yea

کمیت	دستگاه MLTθ	نماد
مساحت	L^2	A
سرعت	LT^{-1}	V
شتاب	LT^{-2}	a
سرعت صوت	LT^{-1}	C
آهنگ حجم	L^3T^{-1}	Q
فشار	$ML^{-1}T^{-2}$	P
سرعت زاویه‌ای	T^{-1}	ω
ویسکوزیته	$ML^{-1}T^{-1}$	μ
کشش سطحی	MT^{-2}	σ
نیرو	MLT^{-2}	F
گشتاور	ML^2T^{-2}	M
توان	ML^2T^{-1}	P
ضریب رسانش گرما	$MLT^{-3}\theta^{-1}$	k
گرمای ویژه	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	c_p, c_v
چگالی	ML^{-3}	ρ

فصل ۵ - آنالیز ابعادی

بی‌بعد کردن معادلات :

معادله نویر استوکس بدون بعد

اهمیت آنالیز ابعادی برای مقایسه

همه‌ی مقادیری که ما با آن‌ها سر و کار داریم، ترکیبی از طول - زمان - جرم و نیرو هستند و با توان‌های لازم بیرون جرم مربوط می‌شوند :

$$\sum F = ma \Longrightarrow F = M\frac{L}{T^2}$$

F، M، L و T ابعاد نیرو، جرم، طول و زمان هستند. اگر سه تا از این ابعاد را اصل بگیریم چهارمی بر حسب آن‌ها بیان می‌شود. پس M-L-T را انتخاب می‌کنیم و نیرو را بر اساس آن تعریف می‌کنیم

مثال - نیروی درگ وارد بر یک ... : نیروی درگ وارد بر جسم متحرک

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \longrightarrow$$

قطر، سرعت سیال، چگالی، ویسکوزیته

روش‌های آنالیز ابعادی ← روش پای باکینگهام

تئوری π باکینگهام ← اگر در مسئله‌ای n متغیر داشته باشیم و در این مسئله m بعد اولیه وجود داشته باشد در این صورت می‌توان مدل را بر حسب n-m پارامتر بدون بعد بیان کرد :

متغیر تابع — متغیرهای مستقل

$$x_1 = f(\overline{x_2, x_3, \dots, x_n}) \longrightarrow \pi_1 = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})$$

نحوه‌ی محاسبه اعداد بدون بعد :

مثال : جریان سیال داخل لوله‌ای ... بدون تلاطم در یک مقطع لوله، تابع تغییرات فشار بر واحد طول است، تابع قطر لوله و ویسکوزیته است. معادلات بی‌بعد را بیابید.

$$F\left(Q, \frac{\Delta P}{L}, D, \mu\right) = 0$$

$Q \to AV \to m^2\,m/s \to \frac{L^3}{T}$

$\frac{\Delta P}{L} \to \frac{kg\,m/s^2}{m^3} \to \frac{kg}{m^2 s^2} \to \frac{M}{L^2T^2}$

$D \to L$

$\mu \to \frac{M}{LT}$

۴ متغیر داریم ← ۳ بعد داریم ← ۴-۳=۱ عدد بدون بعد داریم

$$\pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{y_1} D^{z_1} \mu^1$$

$$\Rightarrow \pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}(L)^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})^1 = M^0L^0T^0$$

$\Rightarrow 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$: L جمع توان‌ها

$y_1 + 1 = 0$: M

$-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$: T

$\Rightarrow x_1 = 1,\quad y_1 = -1,\quad z_1 = -4$

$$\Longrightarrow \pi = Q^1\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{-1}(D)^{-4}\mu^1 = \frac{Q\mu}{\frac{\Delta P}{L}D^4} \longrightarrow \boxed{Q = C \cdot \frac{\Delta P}{L} \cdot \frac{D^4}{\mu}}$$

عدد ثابت

فصل ۵ - آنالیز ابعادی

بی بعد کردن معادلات : وقتی عدد بدون بعد باشد یعنی نسبت نیروها مختلف مختلف حجم باشد

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{DV^*}{Dt^*} = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} V^* + \frac{1}{Fr^2} \vec{u}} \rightarrow$$ معادله نویر استوکس بدون بعد

اهمیت آنالیز ابعادی برای مقایسه کردن یک مدل با مقیاس حقیقی آن است.

همه مقادیری که ما با آن ها سروکار داریم، ترکیبی از طول - زمان - جرم هستند و با قانون دوم نیوتن جرم مربوط می شوند :

$$\sum F = ma \Longrightarrow F = M\frac{L}{T^2}$$

F ، M ، L و T ابعاد نیرو، جرم، طول و زمان هستند. اگر بسته ای از ابعاد را اصل بگیریم چهار مجهول آن ها بیان می شود. پس M_L_T را انتخاب می کنیم و نیرو را بر اساس آن تعریف می کنیم

مثال - نیروی درگ وارد بر یک : نیروی درگ وابسته به ۴ متغیر است

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \longrightarrow$$

قطر - سرعت سیال - چگالی - لزجت (ویسکوزیته)

روش های آنالیز ابعادی ⟵ روش پای باکینگهام

نظریه π باکینگهام ⟵ اگر در مسئله ای n متغیر داشته باشیم و در این مسئله m بعد اولیه وجود داشته باشد در این صورت می توان مدل را بر حسب n-m پارامتر بدون بعد بیان کرد :

متغیر تابع — متغیرهای مستقل

$$X_1 = f(X_2, X_3, \ldots, X_n) \longrightarrow \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m})$$

نحوه ی محاسبه اعداد بدون بعد :

مثال : وقتی جریان سیال داخل تیوپ عبور می کند. بدون تیوب در حجم لوله، تابع تغییرات فشار بر واحد طول است تابع دبی لوله و ویسکوزیته است. معادله بی بعد را بیابید.

$$F\left(Q, \frac{\Delta P}{L}, D, \mu\right) = 0$$

- $Q \to AV \to m^2\, m/s \to \frac{L^3}{T}$
- $\frac{\Delta P}{L} \to \frac{kg\,m/s^2}{m^3} \to \frac{kg}{m^2 s^2} \to \frac{M}{L^2T^2}$
- $D \to L$
- $\mu \to \frac{M}{LT}$

۴ متغیر داریم ⟵ ۳ بعد داریم ⟵ ۱=۳-۴ عدد بدون بعد داریم

$$\pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{y_1} D^{z_1} \mu^1$$

$$\rightarrow \pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}(L)^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})^1 = M^0L^0T^0$$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$$: جمع توان‌های L ⟹ $x_1 = 1$

$$y_1 + 1 = 0$$: M ″ ″ ⟹ $y_1 = -1$

فصل ۵ - آنالیز ابعادی

بی بعد کردن معادلات : ویژگی عدد بدون بعد این است که نسبت نیروهای مختلف به هم باشد

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{Dv^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} v^* + \frac{1}{Fr^2} \vec{u}} \rightarrow$$ معادله ناویر استوکس بدون بعد

اهمیت آنالیز ابعادی برای مقایسه کردن یک مدل با مقیاس حقیقی آن است.

همه‌ی مقادیری که ما با آن ها سروکار داریم، ترکیبی از طول، زمان، جرم و نیرو هستند و با قانون دوم نیوتن به هم مربوط می‌شوند:

$$\sum F = ma \Longrightarrow F = M\frac{L}{T^2}$$

F ، M ، L و T ابعاد نیرو، جرم، طول و زمان هستند. اگر سه تا از این ابعاد را اصل بگیریم چهارمی برحسب آن ها بیان می‌شود. سیستم M-L-T را انتخاب می‌کنیم و نیرو را براساس آن تعریف می‌کنیم

مثال - نیروی درگ وارد بر کره : نیروی درگ وابسته به متغیرهای :

$$F = f(\underset{\text{قطر}}{D}, \underset{\text{سرعت سیال}}{V}, \underset{\text{چگالی}}{\rho}, \underset{\text{ضریب لزجت}}{\mu})$$

روش‌های آنالیز ابعادی ← روش پای باکینگهام

تئوری π باکینگهام ← اگر در مسئله‌ای n متغیر داشته باشیم و در این مسئله m بعد اولیه وجود داشته باشد در این صورت می‌توان مدل را برحسب n-m پارامتر بدون بعد بیان کرد.

$$\underset{\text{متغیر تابع}}{X_1} = f(\underbrace{X_2, X_3, \ldots, X_n}_{\text{متغیرهای مستقل}}) \longrightarrow \pi_1 = F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-m})$$

نحوه‌ی محاسبه اعداد بدون بعد :

مثال : ویسکوز سیالی داخل لوله‌ای عبور می‌کند. بدون بررسی دبی حجمی لوله، تابع تغییرات فشار بر واحد طول است

$$F(Q, \frac{\Delta P}{L}, D, \mu) = 0$$

تابع عملکرد لوله و ویسکوزیته است. معادله را به بعد پایه بیابید.

Q: $AV \rightarrow m^2 m/s \rightarrow \frac{L^3}{T}$

$\frac{\Delta P}{L}$: $\frac{kg\, m/s^2}{m^2} \rightarrow \frac{kg}{m^2 s^2} \rightarrow \frac{M}{L^2T^2}$

D: L

μ: $\frac{M}{LT}$

۴ متغیر داریم ← ۳ بعد داریم ← ۱=۳-۴ عدد بدون بعد داریم

$$\pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{y_1} D^{z_1} \mu^1$$

$$\rightarrow \pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}(L)^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})^1 = M^0L^0T^0$$

$\Rightarrow 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$: L مجموع توان‌های ⟹ $x_1 = 1$

$y_1 + 1 = 0$: M " " ⟹ $y_1 = -1$

$-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$: T " "

مثال: می‌خواهیم نیروی کششی F_D را در مورد یک استوانه به قطر d و طول L را تعیین کنیم.

$$F_D = f(d, L, V, \mu, \rho)$$ ⟵ اگر متغیرها را کم در نظر گرفته باشیم در آزمایش خطا مشخص می‌شود.

$$F_D \to \frac{ML}{T^2},\quad d \to L,\quad L \to L,\quad V \to \frac{L}{T},\quad \mu \to \frac{M}{LT},\quad \rho \to \frac{M}{L^3}$$

۶ متغیر و ۳ دیمانسیون ⟵ ۶−۳=۳ عدد بدون بعد.

حالا باید متغیرهای تکرارشونده را تعیین کنیم. این متغیرها را d و V و ρ در نظر می‌گیریم. این‌ها نباید خودشان به تنهایی عدد بدون بعد بسازند. دقت کنید که مثلاً d و L را نمی‌توانیم باهم تکرارشونده در نظر بگیریم، چون خودشان عدد بدون بعد می‌سازند.

$$\pi_1 = \rho^{x_1} V^{y_1} d^{z_1} F_D = (ML^{-3})^{x_1}(LT^{-1})^{y_1}(L)^{z_1}(MLT^{-2})^1 = M^0L^0T^0$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} V^{y_2} d^{z_2} \mu = (ML^{-3})^{x_2}(LT^{-1})^{y_2}(L)^{z_2}(ML^{-1}T^{-1})^1 = M^0L^0T^0$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} V^{y_3} d^{z_3} L = (ML^{-3})^{x_3}(LT^{-1})^{y_3}(L)^{z_3}(L) = M^0L^0T^0$$

$$\pi_1 \xrightarrow{L} -3x_1+y_1+z_1+1=0,\ x_1+1=0,\ -y_1-2=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-2 \\ z_1=-2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \pi_1 = \rho^{-1}V^{-2}d^{-2}F_D = \boxed{\frac{F_D}{\rho V^2 d^2}}$$

$$\pi_2 \longrightarrow -3x_2+y_2+z_2-1=0,\ x_2+1=0,\ -y_2-1=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-1 \\ z_2=-1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \pi_2 = \rho^{-1}V^{-1}d^{-1}\mu = \boxed{\frac{\mu}{\rho V d}}$$

$$\pi_3 \longrightarrow -3x_3+y_3+z_3+1=0,\ x_3=0,\ -y_3=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3=0 \\ y_3=0 \\ z_3=-1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \pi_3 = \rho^0 V^0 d^{-1} L = \boxed{\frac{L}{d}}$$

حال رابطه جدید بدون بعد را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \\ \text{or}\quad \dfrac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f\left(\dfrac{\mu}{\rho V d}, \dfrac{L}{d}\right) \end{cases}$$

لذا به جای ۵ متغیر مستقل فقط ۲ متغیر مستقل داریم.

مثال: سیال از شکاف V شکل تخلیه می‌شود. دبی Q خارج می‌شود اگر سرعت خروج سیال از شکاف V_0 باشد.

$$F(Q, h, g, V_0, \theta) = 0$$

$$n - m = 5 - 2 = 3 \quad (T, L)$$

۳ عدد بدون بعد که یکی θ است. دوتای دیگر؟

$$\pi_1 = h^{x_1} g^{y_1} Q = L^{x_1}(LT^{-2})^{y_1}(L^3T^{-1}) \longrightarrow \pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}}$$

$$\pi_2 = h^{x_2} g^{y_2} V_0 = L^{x_2}(LT^{-2})^{y_2}(LT^{-1}) \longrightarrow \pi_2 = \frac{V_0}{\sqrt{gh}}$$

$$\pi_3 = \theta$$

$$\longrightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}} = f\left(\frac{V_0}{\sqrt{gh}}, \theta\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{Q = \sqrt{g}\, h^{5/2} f\left(\frac{V_0}{\sqrt{gh}}, \theta\right)}$$

اعداد بدون بعد :

$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$ عدد رینولدز

$M = \frac{V}{c}$ عدد ماخ

c: سرعت صوت در سیال مورد نظر

$Fr = V/\sqrt{gL}$ عدد فرود

$We = \rho V^2 L/\sigma$ عدد وبر

$Eu = \Delta P/\frac{1}{2}\rho V^2$ عدد اویلر

$Ca = P - P_v/\frac{1}{2}\rho V^2$ عدد کویتاسیون

* مسئله ۲۶ ← chapter 5 m

* وقتی افت فشار مهم باشد 3 (اغلب جریان ها) ← $Eu = \Delta P/\rho V^2 = \frac{\text{نیروی فشار}}{\text{نیروی اینرسی}}$

* جریان هایی که نیروی ویسکوزیته در آن ها مهم باشد: ← $Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}}$
(جریان های داخلی - لایه مرزی)

* جریان هایی که تحت تاثیر نیروی جاذبه باشند: ← $Fr = V/\sqrt{Lg} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی جاذبه}}$
(جریان های سطح آزاد)

* جریان هایی که تراکم پذیری در آن ها مهم باشد: $(V > 0.3c)$ ← $M = \frac{V}{c} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی تراکم پذیری}}$

* جریان هایی که تحت تاثیر نیروی کشش سطحی باشند. ← $We = V^2 \rho L/\sigma = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$
(جریان در سطح تماس)

فصل ششم ۵۵

جریان در لوله ها ← $Re < 2100$ جریان آرام
$Re > 2100$ جریان درهم

گسترش جریان در لوله اسلاید ۳

هرجا به لوله هست سرعت سیال با دیواره یکی میشه، دیواره ساکن باشه، سرعت سیال جاییکه با دیواره صفر میشه لایه ای که کنار دیواره هست، اونکه و دیوار وجود دیواره شکل میگیره، رشد میکنه تا بهم برسن میگیم لایه های مرزی

جریان در حال پیشرفته Developing یعنی با تغییر x جریان داره تغییر میکنه تا جایی که به هم برسن میگیم لایه های

به جز نقطه تیزی که نداریم به این طول، طول گسترش یافتگی.
فرض کنیم جریان فقط در راستای محور z ها باشد و در جهت r و θ جریان گسترش است و تنها وابسته به r است
به جز نقطه تغییرات ندهیم.

Fully Developed

جریان گسترش یافته ← مطالعه جریان آرام طول گسترش یافتگی : $\frac{L_E}{D}=0.058\,Re$

مطالعه جریان درهم : $\frac{L_E}{D}=120$

هرچه رینولدز ⇑ و مقدار ⇑ طول گسترش یافتگی جریان آرام ⇑

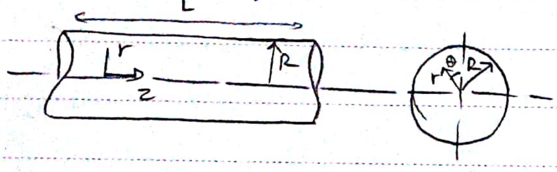
$Re<2000 \rightarrow$ آرام $\qquad Re>4000 \rightarrow$ درهم

$2000<Re<4000 \rightarrow$ حالت گذرا

افت فشار و توزیع سرعت برای جریان آرام در داخل لوله افقی در حالت پایدار و توسعه یافته؟

جریان آرام، سیال نیوتنی، دانسیته ثابت، استیدی استیت، fully developed و no slip

حل معادله ناویر استوکس برای جریان کاملا توسعه یافته درون لوله :



جریان کاملا توسعه یافته — جریان متقارن

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right)+\cancel{\rho g_z}$$

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}}_{0}+\underbrace{\cancel{v_r}}_{0}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\underbrace{\cancel{\frac{v_\theta}{r}}}_{0}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}}_{0}\right)$$

S.S — خطوط جریان / معادله پیوستگی — جریان غیرچرخشی — جریان کاملا توسعه یافته

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

چون $v_z=v_z(r)$ پس $\frac{\partial P}{\partial z}$ باید مقدار ثابتی باشد (در جریان توسعه یافته)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L}\longrightarrow\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\Delta P}{L}r$$

$$r\frac{dv_z}{dr}=\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}r^2+A\longrightarrow\frac{dv_z}{dr}=\frac{\Delta P}{2\mu L}r+\frac{A}{r}$$

$$\Longrightarrow\boxed{v_z=\frac{\Delta P}{4\mu L}r^2+A\ln r+B}$$ ⟶ مقادیر ثابت را با شرایط مرزی به دست می‌آوریم.

$$\left|\begin{array}{l}r=0\\ \frac{dv_z}{dr}=0\end{array}\right.\xrightarrow{}A=0\;,\quad\left|\begin{array}{l}r=R\\ v_z=0\end{array}\right.\Longrightarrow B=-\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

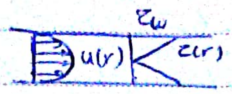
$$\Longrightarrow\boxed{v_z=\frac{\Delta P}{4\mu L}(r^2-R^2)=\frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}\ \checkmark$$

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

* جریان توسعه‌یافته درون لوله‌ها

تنش برشی دیواره :

$$\tau_{rz} = -\frac{r}{2}\frac{\Delta P}{L}$$
$$\tau_w = -\frac{D}{4}\frac{\Delta P}{L}$$

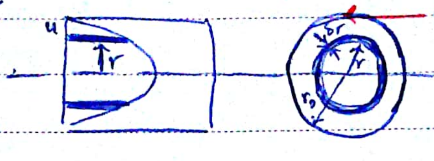


پروفیل سرعت :

$$\boxed{v_z(r) = \frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$$

اگر بخواهیم دبی حجمی را محاسبه کنیم :

$$Q = \int u\,dA = \int_0^{r_0} u \; 2\pi r\,dr$$
$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$



دبی حجمی هنگام انتگرال‌گیری : ←

$$Q = \frac{\pi \Delta P D^4}{128\mu L}$$

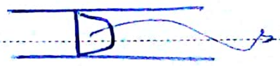
سرعت متوسط ←

$$\bar{v} = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

ماکسیمم سرعت ←

$$u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 2\bar{v}$$


جریان لایه‌ای


جریان توربولانس

شبیه یک لقمه

* سوال به صورت تجربی پروفیل سرعت جریان توربولانس داریم :

$$\boxed{v = v_{max}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7}}$$

$$f = \frac{0.0791}{N_{Re}}$$

جریان درهم در لوله‌ها : در جریان درهم هیچ کدام از مولفه‌های سرعت صفر نیست.

$v = \bar{v} + v'$ → اغتشاش در جهت سرعت ، در همه جهات هست.

→ سرعت جریان توربولانس

v' : سرعت اغتشاشی

$\bar{v}$: سرعت متوسط

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt \xrightarrow{\text{در جریان توسعه یافته}} \bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0 \quad *$$

$\bar{v} = u\hat{i}$ → Laminar

$\bar{v} = (\bar{u}+u')\hat{i} + w'\hat{k} + v'\hat{j}$ → Turbulent

توزیع عمومی سرعت در جریان درهم : اعداد بدون بعد :

سرعت اصطکاکی → $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ (تنش دیواره)

PAPCO

تنش برشی در سطح دیواره ها ماکسیمم و در مرکز صفر است.

Subject :
Year . Month . Date . ( )

سرعت بدون بعد → $u^+ = \frac{v_z}{u^*}$

فاصله از جداره لوله → $y = R - r$

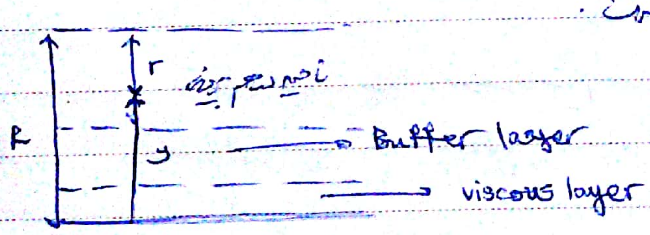
فاصله بدون بعد از دیواره → $y^+ = \frac{y u^* \rho}{\mu}$

نزدیک دیواره یک لایه (ساکن) جریان وجود دارد که سیال به دیواره می چسبد؛ شرط no slip باعث میشه سرعت ها صفر بشه. روی صفحه صفر هستند و بیشتر میشه تا جایی که سرعت ثابت میشه و برابر سرعت سیال گذرنده از روی صفحه میشه.
لایه مرزی خیلی نازکی که چسبیده به دیواره باعث میشه سرعت کم کم به ۹۹٪ سرعت اصلی برسه، لایه مرزی میگن.
نیروی لزجی در آن لایه → جریان ملایم روی هم می لغزند (از فاصله صفر تا یک بیشتر).
جریان توربولانس ← ادی ها جریان دارند و لحظه ای اغتشاش دارند. وقتی بخواهیم جریان لایه ای داشته باشیم داخل لوله و نزدیک دیواره ها لایه ای باشه. (با جریان توربولانس سیال و گردابه دور از دیواره هم لایه ای میشه)
معادله مطالعه توربولانس بر پایه سرعت بدون بعد u^+ و فاصله از دیواره y^+ به عنوان محور:

$$u^+ = u^+(y^+)$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad \begin{cases} u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \\ \bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \end{cases} \qquad y^+ = \frac{y u^*}{\nu}$$

هنگام عبور از لوله جریان توربولانس داریم، یه زیر لایه ویسکوز بسیار کوچک نزدیک جریان آرام داریم و تنها تنش ویسکوز در این لایه موثر هستند و ادی ها کم هستند.
لایه هم پوشانی (گذار) هم بسیار نازک است. در این جا تنش ویسکوز و ادی ها حضور دارند.
در ناحیه مغشوش هم فقط ادی ها هستند که موثرند و از اثرات ویسکوزیته مولکولی می توان صرف نظر کرد. این ناحیه قسمت اعظم سطح مقطع لوله را اشغال می کند و این ناحیه ها حالا درهم است.



لایه ویسکوز ← $0 < y^+ < 5 \rightarrow u^+ = y^+$

لایه بافر ← $5 < y^+ < 30 \rightarrow u^+ = 5\ln y^+ - 3.05$

لایه درهم ← $y^+ > 30 \rightarrow u^+ = 2.457\ln y^+ + 5.67$

روش دیگر این است که از توزیع سرعت قانون توانی استفاده کنیم:

$$\frac{\bar{v}}{v_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

Re	4×10^3	10^5	10^6	$>2\times10^6$
n	6	7	9	10

معمولاً $n=7$ است.

Subject :
Year . Month . Date . ( )

جلسه ۹۹/۱۲/۲۱

نحوه ی مدل کردن جریان : در جریان لمینار : $\tau = \mu \frac{du}{dr}$ ← تنش برشی

ویسکوزیته — پروفیل سرعت

سپس مدل کردن تنش در جریان توربولانس : $\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy}$

تنش مجازی — ادی ویسکوزیته

مدل کردن η ← توی گاز وقتی مولکول می خواد به مولکول دیگه برخورد کنه یه فاصله ای رو طی می کنه. توی سیالات هم سیال یه مسیری رو طی می کنه تا وارد یه محیط جدید بشه و تغییری در اندازه حرکتش بوجود بیاد.

$v \sim u' \sim L\frac{du}{dy}$ ← $\left(\frac{u'}{L}\right)$ سرعت زاویه ای ~ سرعت زاویه ای $\left(\frac{du}{dy}\right)$

$\tau = \rho u'v'$ ← $\tau = \rho L^2 \frac{du}{dy}$

ادی ویسکوزیته خیلی بزرگتر از ویسکوزیته ی معمولیه و صرفا به جریان بستگی داره نه سیال.

η ← تابع جریان

ν, μ ← تابع جنس سیال

ساده ترین مدل توربولانس

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy} \quad , \quad \eta = \rho L^2 \frac{du}{dy} \quad , \quad L = k\frac{du/dy}{d^2u/dy^2}$$

روابط انرژی ← داشتیم : در صورت وجود پمپ و توربین :

$$\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_T - \dot{W}_p}{\dot{m}g} = h_T - h_p$$

این h_f ناشی از $k\frac{v^2}{2g}$ (تغییر هندسه) [در معادله برنولی میاد] و $f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$ (اصطکاک) است.

$$h_p + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = h_T + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f^{*}$$ ← [illegible]

تو فصل ۳ دیدیم که افت جریان یه مقدار ناشی از تغییر شکل لوله باشه و جاهایی مناسب شو باید اینجا بعدا وارد داشتیم :

$$h_f = k\frac{v^2}{2g}$$

$\dot{W}_T = \rho g h_T Q \eta_T$ ← اگه توان توربین رو بخوایم باید داشته باشیم هد توربین از کجا بدست میاد

$\dot{W}_p = \rho g h_p Q/\eta_p$ ← اگه توان پمپ " " " هد پمپ " " "

نحوه ی محاسبه ی h_f ناشی از اصطکاک : ضریب اصطکاک :

آب در دمای ۲۰ درجه و چگالی ۹۹۸ kg/m³ درون لوله ای با قطر ۸ cm جریان دارد. در سطح A و B ، $P_A = ۱۸۶$ kpa و $V_A = ۳/۲$ m/s و $Z_A = ۲۴/۵$ m و $P_B = ۲۶۰$ kpa و $V_B = ۳/۲$ m/s و $Z_B = ۹/۱$ m ، جریان به کدام سمت می رود؟ هد Loss ؟

$$\boxed{h_f = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}}$$ ⊛

اگر f جریان لمینار و توربولانس رو داشته باشیم h_f (اصطکاک ناشی از اصطکاک) برابر

تعریف ضریب اصطکاک :

Fanning : $f_F = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2} \longrightarrow \tau_w = \dfrac{1}{2} f_F \rho v^2$

$\longrightarrow h_f = 4f_F \dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g}$

f ضریب اصطکاک دارسی

ضریب اصطکاک دارسی $\frac{1}{4}$ = ضریب اصطکاک فنینگ

معادله دارسی - ویسباخ :

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} \qquad \xrightarrow[\text{جریان لمینار}]{f=?} \qquad \boxed{f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re}}$$

دیاگرام مودی ← محور افقی عدد رینولدز است و محور عمودی ضریب اصطکاک (عموما دارسی) است (اسلاید ۲۱ - chap4m)

خط صاف سمت چپ مربوط به جریان لمینار است.

سایر جریان توربولانس زبری نسبی ($\frac{\epsilon}{D}$) های مختلف خطوط مختلفی دارند.

* بین جریان توربولانس و جریان لمینار هنگام محاسبه ی اصطکاک یک تفاوت اساسی وجود دارد ؟

– در جریان لمینار زبری دیواره اثری ندارد.

– در جریان توربولانس مرا بسی زبری دیواره ی تقسیم بر قطر (زبری دیواره نسبی).

زبری لوله کجا اثر می‌گذارد ؟ ← روی لایه ی مرزی توسط جریان آرام پوشیده می‌شود و ضخامت لایه مرزی آرام زیاده و زبری به اثر نمی‌رسد هرچه عدد رینولدز بیشتر می‌شود جریان توربولانس تر داشته باشیم،

ضخامت لایه ی مرزی آرام کمتر در نتیجه زبری از جریان بیرون می‌زند و زبری دیواره

تاثیر گذار می‌شود برای جریان آشفته . یعنی هرچه توربولانس بیشتر اصطکاک محاسبه شود

نسبت به دیواره وابسته می‌شود.

جریان آرام ← $f = f(Re)$

زبری لوله

جریان توربولانس ⟶ $f = f\left(Re, \dfrac{\epsilon}{D}\right)$

جلسه ۹۹/۲/۲۳

مثال ← جیوه در ۲۰ درجه سلسیوس در یک لوله ی ۷ میلی متری با طول ۴ متر از جنس شیشه جریان می‌یابد.

سرعت متوسط $5\,m/s$ است. حساب کنید که هد loss و افت فشار چقدر است ؟

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} = f \times \frac{4\,m}{0.007\,m} \times \frac{(5)^2}{2\times 9.81} = \boxed{10.4\,m}$$

؟ ← دیاگرام مودی ← عدد رینولدز و $\frac{\epsilon}{D}$

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{13550\,(5)\,(0.007)}{0.00156} = 304000 \qquad \frac{\epsilon}{D} = 0 \xrightarrow[\text{دیاگرام مودی}]{\text{شیشه}} f \simeq 0.0143$$

۰٫۰۰۱۵۶ ← با مراجعه (ویسکوزیته)

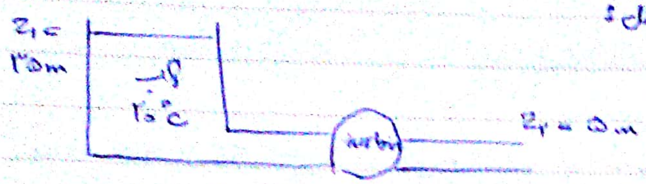
$$\Delta P = \rho g h_f = (13550)(9.81)(10.4) = 1380000\,Pa = \boxed{1380\,kpa}$$

$\boxed{\Delta P = \rho g h_f}$ ⟶ محاسبه هد تلف بر حسب افت فشار

Subject: اسلاید
Year. Month. Date. ( ) جلسه ۱۰ام

$1\,hp = 745.7\,W$ ⑤

مثال: مخزنی در ارتفاع ۳۵m قرار دارد و توسط لوله آهنی با قطر ۳۰cm جریان می‌یابد. توربین با توان ۸۰hp می‌رساند.
آب ... استفاده می‌شود. به صورت ... :
f = 0.019 ... جریان را محاسبه کنید.



$$h_p + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = h_T + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + h_f \qquad h_f = f\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g}$$

$$35 - 5 = h_T + \frac{V_2^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} \to \left(1 + f\frac{L}{D}\right)\frac{V_2^2}{2g} = \left[\left(1 + 0.019\frac{100m}{0.3m}\right)\frac{V_2^2}{2\times 9.81}\right]$$

$$\frac{\dot W_T}{\rho g Q \eta} = \frac{80\,hp\,(745.7\,W/hp)}{9790\,N/m^3 \times 9.81 \times \frac{\pi}{4}(0.3)^2 V_2}$$

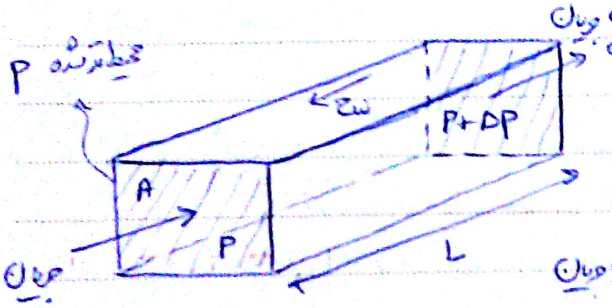
$$\Rightarrow 30 = \frac{86.3}{V_2} + 0.373V_2^2 \to V^3 - 80.43V + 231 = 0$$

سه ریشه دارد
$\to V = 3.34\,m/s \; ; \; 6.81\,m/s \; ; \; -10.15\,m/s$

$Q = 0.481\,m^3/s \to h_T = 12.7\,m \; , \; h_f = 17.3\,m$
$Q = 0.236\,m^3/s \to h_T = 25.8\,m \; , \; h_f = 4.2\,m$ → جواب درست‌تر ✓

اسلاید ۴۷ ↓

مثال: اگر جریان در طول مسیر در یک کانال مستطیل شکل برد چه؟ جریان



در این صورت: همان روش حل تیپ یک روشی که گفتیم داریم
به جای قطر معمولی، قطر معادل هیدرولیکی را استفاده می‌کنیم:

سطح مقطع جریان

$$\boxed{D_e = \frac{4A}{P}}$$ قطر متوسط معادل هیدرولیکی

محیط ترشده (محیط کانال)

افت های فرعی: تا به حال افت فشار در لوله‌ها را بررسی کردیم اما سیستم های لوله‌کشی شیر، زانویی، خم، تبدیل و ... در
جریان‌اند که افت فرعی نام دارد ← $h_m = K\frac{V^2}{2g}$ ؛ K را از جدول می‌خوانیم

پس افت کل خواهد بود:

$$\Delta h_{tot} = h_f + \sum h_m = \frac{V^2}{2g}\left(f\frac{L}{D} + \sum K\right)$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال: با توجه به داده های ارائه شده برای یک لوله ی انتقال آب، افت فشار را برای لوله محاسبه کنید.

Water 20°C $\varepsilon = 0.026\ mm$

$L = 500m$ $Q = 0.003\ m^3/s$

$D = 4cm$ $\Delta P = ?$

حل ← عدد رینولدز $Re = \frac{\rho V d}{\mu}$; $V = \frac{Q}{A} = \frac{0.003}{\frac{\pi}{4}(0.04)^2} = 2.39\ m/s$

$\rightarrow Re = \frac{9790 \times 2.39 \times 0.04}{\mu}$ ← ویسکوزیته آب

or $\rightarrow Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{2.39 \times 0.04}{10^{-6}} = 9.6 \times 10^4$

زبری $\rightarrow \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046}{0.04} = 0.00115$ ⟶ دیاگرام مودی: $f \simeq 0.023$

$\Rightarrow h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.023 \frac{500}{0.04} \times \frac{(2.39)^2}{2 \times 9.81} = 84m \rightarrow \Delta P = \rho g h_f$

$\Rightarrow \Delta P = 9790(9.81)(84) = \boxed{820\ kPa}$ ✓

مثال: می خواهیم $0.002\ m^3/s$ آب $20°C$ را از لوله ای به طول $200\ m$ به گونه ای انتقال دهیم که افت head از 30m بیشتر نشود. قطر لوله چه مقدار باید باشد؟

$\varepsilon = 1.51 \times 10^{-6}$

در این مسئله قطر لوله مجهول است پس مسئله به شکل حدس و خطا خواهد بود. سرعت متوسط برابر با رابطه زیر، تابع قطر است:

$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{0.00255}{D^2}$

$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$ رینولدز: $Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.00255/D^2 \times D}{10^{-6}} = 2550\ D$

← متوجه شدیم که چون قطر مجهول است پس عدد رینولدز رو نداریم که بتوانیم از جدول استفاده کنیم پس f رو حدس می زنیم

$30 = f \frac{200}{D} \frac{(0.00255/D)^2}{2 \times 9.81}$

$\Rightarrow \boxed{D^5 = 4.42 \times 10^{-10} f}$ ← به یک معادله با ۲ مجهول رسیدیم حال باید f را حدس بزنیم

← اگر $f = 0.03$ داریم:

$D = 0.0421 \Rightarrow Re = 2550(0.0421) = 6.06 \times 10^4$

$\frac{\varepsilon}{D} = 0.000036$

حالا $\frac{\varepsilon}{D}$ رو داریم رینولدز هم داریم، می رویم سراغ دیاگرام مودی، می بینیم با این $\frac{\varepsilon}{D}$ و Re هم f به دست می آید؟ اگر f با آنچه که ما حدس زدیم (یعنی 0.03) برابر بود پس جواب درسته نگرفته، دوباره حدس می زنیم تا به جواب درست برسیم. مثلاً با $f = 0.03$، f جدول 0.02 رسید پس حدس

حدس جدید: $f = 0.02 \rightarrow D = 0.0388\ m$ و $Re = 6.57 \times 10^4$ و $\frac{\varepsilon}{D} = 0.000039$

← مراجعه به دیاگرام مودی ⟸ $f_{دیاگرام} = 0.02$ چون $f_{دیاگرام} = f_{حدسی}$ ⟸ درسته

$\rightarrow$ $\boxed{D = 0.0388m = 3.88cm}$ پس

چون این مقدار استاندارد نیست ⟸ $\boxed{D = 4\ cm}$

D = 4cm رو در نظر میگیریم.

PAPCO

$1\,lit = 10^{-3}\,m^3$ $\quad$ $1\,ft = 12\,in$ $\quad$ $g = 32.85\ ft/s^2$

Subject: Year. Month. Date. ( )

جلسه ۹۸/۲/۲۸

مثال: لوله ای با لبه تیز ۱۲۰ lit/s حاوی نفت با $\nu = 0.00001$ است. قطر 200mm و طول 200m دارد. میزان هد اصطکاکی را بدست آورید.

$\varepsilon = 0.00025 \qquad V = Q/A = \dfrac{120\times10^{-3}\ m^3/s}{\frac{\pi}{4}(0.2)^2} = 4.25\ m/s$

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\,\frac{200}{0.2}\,\frac{(4.25)^2}{2(9.81)} = 2024.36\,f \ ?$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4.25\times0.2}{0.00001} = 89000$$

نمودار مودی $\rightarrow f = 0.023 \rightarrow \boxed{h_f = 46.56\ m}$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.00025}{0.2} = 0.00125$$

0.04

مثال: آب در لوله ای فولادی به قطر 300mm و $\varepsilon = 3\,mm$ و بر اثر افت 6m به ازای هر ۳۰۰ متر، Q چقدر است؟

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\,\frac{300}{0.3}\,\frac{(14.14\,Q)^2}{2(9.81)} = 10.2\times10^{7} f\,Q^2 = 6\,m$$

$$V = Q\Big/\tfrac{\pi}{4}(0.3)^2 = 14.14\,Q$$

$$Q^2 = \frac{5.88\times10^{-8}}{f}$$

$Re = \dfrac{VD}{\nu}$ ← ? عدد رینولدز بدست نیاید پس

f را حدس می زنیم $\longrightarrow$ if $f = 0.04 \Rightarrow Q = 1.212\times10^{-3}$

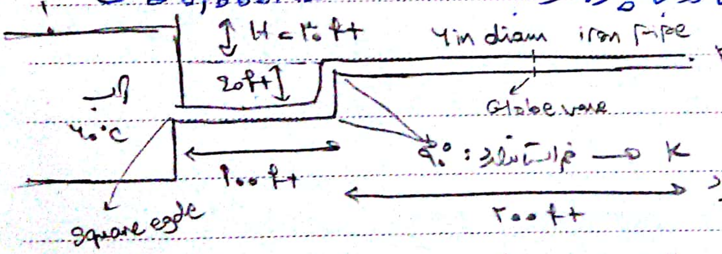
$$Re = \frac{14.14\,Q\times0.3}{10^{-6}} = 51450 \simeq 5\times10^{5}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.003}{0.3} = 0.01 \longrightarrow f_{\text{نمودار}} = 0.04\ \checkmark$$

$$\boxed{Q = 0.0012\ m^3/s}$$

مثال: مخزنی به شکل زیر داریم، به ازای H=30ft دبی عبوری چقدر می شود؟

$\varepsilon = 0.00085$



زانو استاندارد ۹۰°: K ← از جدول بدست بیاید

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + h_f, \qquad z_1 = 30\,ft$$

$$\Rightarrow 30\,ft = \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

$$h_f = 2K\frac{V_2^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{g} + K\frac{V_2^2}{2g} + K\frac{V_2^2}{2g}$$

دو زانو ۹۰ درجه

$$h_f = \left(\frac{1}{2} + 2(0.9) + 10 + f\,\frac{340}{4in\times\frac{1ft}{12in}}\right)\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}(13.3 + 1020f)$$

K ورودی لبه تیز $\quad$ K خم ۹۰ $\quad$ K شیر

با حدس f ← $f_{\text{حدس}} = 0.02$

$$\Longrightarrow 30 = \frac{V^2}{2g}(13.3 + 1020\times0.02) \longrightarrow V = 8.24\ ft/s \ ,\ \frac{\varepsilon}{D} = 0.0017$$

مودی $\rightarrow f_{\text{مودی}} = 0.023 \simeq f_{\text{حدس}} \Longrightarrow$

$$\boxed{V = 8.16\ ft/s}$$

$\rho g_{\text{آب}} = ۹۷۹۰$; $\rho_{\text{آب}} = ۹۹۸$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال : ... ساند لوله آهنی که $\varepsilon = ۰٫۰۰۰۱۵ ft$ ، $۲۰۰۰ \frac{galon}{min}$ (gpm) روغن عبور میدهد و $\nu = ۰٫۰۰۰۱ ft^2/s$ و طول $۱۰۰۰۰ ft$ دارد و $h_f = ۷۵ ft$ ؟

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow ۷۵ = f \frac{10000}{D} \times ۲۰۰۰$$

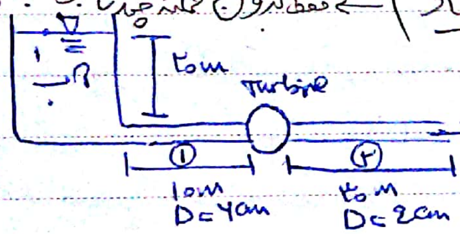
۱۴ $f = ۰٫۰۲$

★ قاعده مرسوم است که به جای ضریب افت k طول معادل را می‌دهند و در این صورت k برابر است با

$$\boxed{k = f \frac{L_e}{D}} \longrightarrow k \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g}$$

★ مثلا ضریب یک لوله با انشعاب ($k = 1$) با قطر $۲۰cm$ و با ضریب اصطکاک برابر $۰٫۰۲$ ، طول معادلش برابر ۱۰ متر از لوله دارد.

مثال : مخزنی دائم با ارتفاع ۲۰ متر آب وارد لوله ۱ شده و وارد توربین شده پس از لوله ۲ خارج می‌شود. اگر توان توربین $۲۰۰ W$ باشد. Q چند m^3/h ؟ (این مسئله دو جواب دارد) ← فقط بدون حل چند تا جواب داشته باشه و همینجا باشه یکیارو ترجیح بده.



$$Q \quad h_p + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = h_T + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + h_f$$

$Z_1 = 20m$

$\dot{W}_T = \rho g Q h_T \eta$

$$\longrightarrow ۲۰ = \frac{۲۰۰}{۹۷۹۰ Q} + \frac{Q^2}{۲(۹٫۸)\left(\frac{\pi}{۴}(۰٫۰۴)^2\right)^2} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

← دو تا f حدس زده ← ۳ تا Q در لغزه ملکیک مقرب بوده دو تاش پرده :

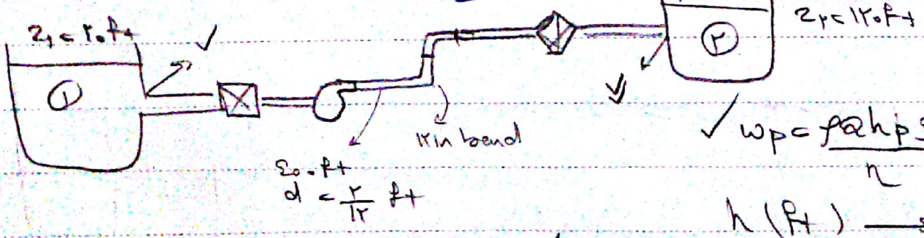
$Q = ۰٫۰۰۴۲۷ \ m^3/s = ۱۵٫۷ \ m^3/h$

$Q = ۰٫۰۰۲۵۰ \ m^3/s = ۹٫۰ \ m^3/h$ ⟶ لذا ترجیح که Q کمتری داره.

مثال : آب رو از مخزن از نقطه ۱ به مخزن ۲ میخواهیم انتقال بدیم. $\rho = ۱٫۹۴ \ slug/ft^3$ و $\nu = ۰٫۰۰۰۰۱۱ \ ft^2/s$ با قطر $۴۰۰ft$

$\frac{e}{d} = ۰٫۰۰۱$ وفقط 12in و ضریب افت ناشی از تغییر شکل ها را میخواهیم به $۰٫۲ \ ft^3/s$ ایجاد کنیم.

توان لازم پمپ را محاسبه کنید.



hp روابط ها محاسبه کنیم بعد ← $\checkmark \ w_p = \frac{\rho Q h_p g}{\eta}$

$h(ft) \longrightarrow$ توان $ft.lbf/s$

اسلاید ۷۱ تا ۷۴ رو تو فایل chapter 7m بین تا داده‌ها نشسته روباد بگیری ①

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل هفتم — جلسه ۹۹/۲/۳۰ — فصل الکتاب والسنت

اسلاید ۴ — pump and mixer M ← دیاگرام خوبی با کیفیت داده:

کجا انرژی hp (هد پمپ) را به کار ببریم؟

توربوماشین‌ها — پمپ یا کمپرسور: به سیال انرژی میدن — پمپ برای مایعات و کمپرسور برای گازها. ترکیبی از پره‌ها
توربین: از سیال انرژی میگیرن و به کار تبدیل میکنن.

پمپ های جابجایی مثبت PDP — مایع وارد حفره میشه، تحت فشار قرار میگیره، از حفره خارج میشه.

پمپ های دینامیکی — معمولا پره دارن، سرعت سیال رو با چرخش پره‌ها زیاد میکنن.

یک نمونه از پمپ های PDP: پمپ‌های رفت و برگشتی هستند که به خاطر این هست که یک پیستون توش حرکت میکنه، سیال به صورت موقت و منقطع وارد و خارج میشه. پمپ‌های رفت و برگشتی یا پیستونی دارند یا دیافراگم.

پمپ های دینامیکی — پمپ‌های روتاری (چرخان) یا special design.

پمپ‌های سانتریفیوژ

این پمپ‌ها معمولا جریان بیشتری تولید میکنند و پایدارتر هستند ولی هد کمی و ویسکوزیته زیاد خیلی خوب کار نمیکنن چون پره سخت‌تر میچرخه.

در یک حدی بیشتر بخواهیم پمپ‌های دینامیکی خیلی کارا هستن.

انتخاب یک پمپ: اگر ① ورودی و ② خروجی پمپ باشد:

$$\underline{H} = \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_2 - \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_1 = (h_p - h_f) \longrightarrow \text{هد خالص}$$

هد پمپ منهای اتلافات.

$$\boxed{P_w = \rho g Q H}$$ ⟶ توان پمپ را میتوان برحسب هد خالص حساب کرد.

معمولا سرعت‌ها در ورودی و خروجی پمپ خیلی تغییرات ندارند و اختلاف سرعت رو در مقابل اختلاف فشار و ارتفاع ورودی و خروجی میتونیم صرف‌نظر کنیم.

اتلافات

بلندای مکش: هد سمت مکش (ورودی)

$$h_s = \frac{P_s}{\rho g} + \cancel{\frac{V_s^2}{2g}} + z_s - h_{fs}$$

بلندای تخلیه: هد تخلیه (خروجی)

$$h_d = \frac{P_d}{\rho g} + \cancel{\frac{V_d^2}{2g}} + z_d + h_{fd}$$

هد کل تلمبه:

$$h_p = h_d - h_s \longrightarrow$$ یعنی پمپ باید بتونه اختلاف فشار، سرعت، ارتفاع ایجاد کنه و اتلافات شبکه رو پوشش بده.

$$h_p = \left(\frac{P_d - P_s}{\rho g}\right) + \left(\frac{V_d^2 - V_s^2}{2g}\right) + (z_d - z_s) + (h_{fd} + h_{fs})$$

PAPCO

Subject :
Year .　　Month .　　Date .　　(　)

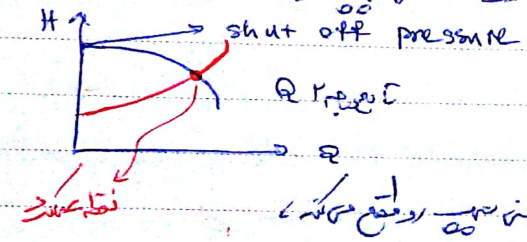
مشکلات پمپ‌ها ← Cavitasion (کویتاسیون) : وقتی فشار انقدر کم بشه که از فشار بخار اون محیط کمتر بشه،
این فشار کم ایجاد بخار می‌کنه (حباب) می‌که وقتی جریان رو منقطع کنه یا به پروانه‌ی پمپ برخورد کنن
باعث شکستن و متخلخل شدن و ساییدگی پروانه و بدنه‌ی پمپ آسیب می‌زنه.
برای اینکه از این مشکل جلوگیری کنیم ← پارامتری مثبت NPSH تعریف شده که می‌گه فشار نباید هیچ وقت از
فشار بخار مایع کمتر بشه تا کویتاسیون رخ نده.

$$NPSH = \frac{P_s - P_v}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s - h_{fs}$$

$$\rightarrow NPSH = h_s - \frac{P_v}{\rho g}$$

چون h_{fs} با افزایش دبی جریان زیاد می‌شود پس
NPSH با افزایش دبی جریان کم می‌شود.

نحوه‌ی انتخاب یک پمپ : منحنی پمپ رسم میشه. یکی از مهمترین منحنی‌ها منحنی هد پمپ بر حسب میزان جریان عبوری Q
است. (منحنی H–Q) ← این منحنی رو سازنده‌ی پمپ معرفی می‌کنه.

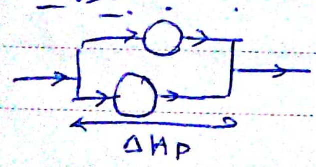


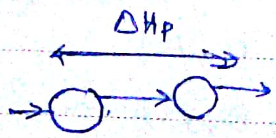
$Q = 0 \rightarrow H = H_{max}$

باید بتونیم به ازای H و Q هم خصوصیات سیستم رو بدانیم و
برای سیستم بتونیم یه منحنی رسم کنیم. نقطه‌ای که منحنی سیستم منحنی پمپ رو قطع می‌کنه،
بهترین نقطه‌ی عملکرد پمپ روی اینه ← نقطه عملکرد (بهترین نقطه عملکرد)

نحوه‌ی رسم منحنی سیستم : $h_{sys} = h_s - h_d = H$ → همون معادله انرژیه

منحنی‌ها رو می‌تونیم بر حسب اعداد بدون بعد هم رسم کنیم
مثلا به جای منحنی (H–Q) منحنی $\left(\frac{\Delta P}{\rho D^2 N^2} - \frac{Q}{ND^3}\right)$ رو میکشن
وقتی یک پمپ کوچیک داریم که می‌خوایم دبی یا هد بیشتری داشته باشیم، میشه از چند تا پمپ کوچیک استفاده کرد.
⚠ اگر پمپ‌ها رو سری ببندیم ← دبی همون میزان می‌مونه ولی ΔH تقریبا دو برابر میشه (اگر دو تا پمپ سری ببندیم)
⚠ اگر پمپ‌ها رو موازی ببندیم ← دبی بین پمپ‌ها تقسیم میشه در حالی که ΔH ثابته. دبی بیشتر میشه.





دبی بیشتر ← موازی
هد بیشتر ← سری

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اسلاید ۳۹ — pump & mixer ۱۹

منحنی مشخصه سیستم را با اطلاعات زیر، ویسکوزیته سیال ۰/۰۴pa ، $\rho = 1200\ kg/m^3$ ، $z_s = 3m$ ، $z_d = 7m$ هدف رسم منحنی H-Q است

$$h_{sys} = \frac{P_d - P_s}{\rho g} + \frac{v_d^2 - v_s^2}{2g} + z_d - z_s + h_{fs} + h_{fd}$$

$d_i = 0.0526m$
$e = 0.000025m$
$P_s =$ فشار اتمسفر
$P_d =$ " "
$\Sigma L_{es} = 2.9m$
$\Sigma L_{ed} = 43.2m$

ترکیب پمپ های سری :

$Q = Q_1 + Q_2$
$h = h_1 + h_2$

روش جبری : if $h_1 = f_1(Q)$, $h_2 = f_2(Q)$; $h = h_1 + h_2 = f_1(Q) + f_2(Q)$

→ if هر دو پمپ یکسان ⟹ $h = 2h_1 = 2f(Q)$

روش هندسی ← به ازای هر دبی منحنی از روی شکل h_1 و h_2 و h را بر حسب دبی Q بدست می آوریم $h = h_1 + h_2$
این نقطه کارکرد سیستم است در تغییر اسنیفرت باید Q را عوض کرد.

ترکیب پمپ ها موازی :

روش جبری Q_1 و Q_2 را از معادله منحنی مشخصه پمپ محاسبه میکنیم (h یکسان) پس $Q = Q_1 + Q_2$
را به دست می آوریم این منحنی مشخصه جدید است . تقاطع میدهیم ← نقطه کارکرد.

اعداد بدون بعد : اسلاید ۴۱ و ۴۲ اندازه و ابعاد یکسان سرعت ها در نقاط مختلف

دو سیستم مشابه هستند : از نظر هندسی مشابه باشند ، از نظر سینماتیکی مشابه باشند و اعداد بدون بعد شون مساوی باشند (اعداد بدون بعد در تغییر هستند)

هد پمپ $h = g_1(Q, \rho, \omega, D, \mu)$
توان پمپ $P = g_2(Q, \rho, \omega, D, \mu)$

هد بدون بعد $$\frac{h}{\omega^2 D^2} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right)$$

توان " " $$\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} = f_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right)$$

سرعت مخصوص (centrifugal pump) : $N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{h^{3/4}}$ ، از تعیین پمپ مناسب

پیدا کردن N_s به انتخاب پمپ مناسب هم راستی می‌کنه .

پمپ های مشابه :

دبی $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3$

هد $\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$

توان $\frac{P_{E_1}}{P_{E_2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^5$

Mixers ← کتاب ولتی و هلند ۱۳۹۹/۳/۱۱

دو دسته مخلوط کننده داریم ← میکسرها با پره های سبک - نوع توربینی - سیال سبک

← سیال ویسکوز به صورت لایه خزنده ... مخلوطش کنه مواد لیناهدل با پره و چرخش استفاده میشه .

سرعت بالا پره های سبک ← پره های ۶ پره ← سه پره چرخش یا پره های ملخی ← با چرخش پره ها اگر فقط پره ها وسط تانک باشه ، دایره های مشابه جریان شروع به چرخش می‌کنن و هیچ اختلاط صورت نمی‌گیره . مایل به تیکه های اضافی در دیواره تانک ها تا این جریان های دایره ای رو بشکنن و اختلاط صورت بگیره .

$\frac{P g_c}{\rho N^3 D^5}$ ← عدد بدون بعد توان موقعی که پره رو می‌چرخونه

عدد فرود ← عدد بدون بعدی که سرعت ... لینرسی ؟ ← بود .

توان میکسرها ← N سرعت دوران بر ثانیه است

power number $P_o = \frac{P_A}{\rho N^3 D_A^5}$ ← عدد بدون بعد پره ها

عدد رینولدز مخصوص میکسرها $Re_M = \frac{\rho N D_A^2}{\mu}$

D_A قطر پره

D_T قطر تانک

$Fr_M = \frac{N^2 D_A}{g}$ → عدد فرود

$\Phi = \frac{P_o}{Fr_M^y} = C Re_M^x$ ← با افزایش ... Φ و رینولدز وابسته است و توان ... لینیار و بدون بعد هستن .

$\Phi = P_o = C Re_M^x$ ← هنگامی که تیغه (بافل) داریم رابطه ...

Subject: N=100
Year. Month. Date. ( ) P

هفته ۹ - رینولدز تکار شده.

مواجه مخزن استاندارد از اسلاید ۵۳ و ۵۴ داریم و اطلاعات مرتبط

مثال ۲ - اسلاید ۶۶ - ۶۷ با رینولدز ← P بدست میاد از نمودار ← P و شکل داده تا نمیتوان حمول P_0 و بعد P_0 را توان اعداد بیابید ← اگه شکل نداشتیم باید عدد فرود هم بدست بیاریم بعد P ضرب در فرود حمول P_0 میشد.

اگه سیال غیرنیوتنی داشتیم باید بگردیم نمودارهای مربوط به اونا رو پیدا کنیم.

اگر جریان لغزشی بود میشه از همون نمودارهای سیال نیوتنی برای شون استفاده کرد ولی تو ناحیه انتقالی و توربولانس متفاوت اند.

سیال نیوتنی یا غیرنیوتنی داریم، کاربرد همزن‌ها نسبت چی مختصات داره؟ بعد با دونستن اطلاعات بعد هم رینولدز و توان همزن مورد نظر خودمون رو انتخاب می‌کنیم.

استرتر ۶-۱۴ ← همزن‌ها (ویدئو ۹)

مواجه ساختن همزن‌های مشابه ←

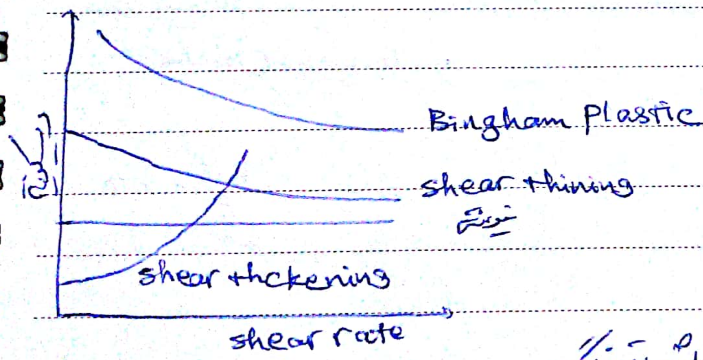
$$N_1 D_{A_1}^2 = N_2 D_{A_2}^2$$

$$\longrightarrow P_0 = C\, Re_M^x\, Fr_M^y$$

۱۳ مرداد ۹۹

سیالات غیرنیوتنی - کتاب هلند

سیالات غیرنیوتنی هستند که رفتار غیرخطی دارند یا مستقل از عامل سرعت برشی ویسکوزیته آن‌ها تابع زمان، دما یا ... است.



سیالات غیرنیوتنی ← تابع زمان هستند / تابع زمان نیستند

نمودار اول تو صفحه دوم جزوه جلسه دوم (۲۷/۱۱) هست.

سیال بودر پلاستیک ← سرعت برشی ↑ ویسکوزیته ↓ مثل شیرتینینگ.

رفتار سیال بینگام پلاستیک

رفتار طبیعت ← مثل شیرتیکنینگ.

Subject:
Year. Month. Date ( )

سیالات غیرنیوتنی تابع زمان ← تیکسوتروپیک ← در تنش برشی ثابت ویسکوزیته ظاهری آن با زمان برشی کاهش می‌یابد.
← رئوپکتیک

سیال ویسکوالاستیک ← رفتاری بین جامد و سیال دارد.

* سیالات shear thining و shear thickening که از مدل عمومی پیروی می‌کنند مورد نظر ماست.

$$\boxed{\tau = -K\dot{\gamma}^{n}}$$

مدل توانی یا قانون توانی

if $n<1 \rightarrow$ shear thining $[0.2, 0.3]$

$n>1 \rightarrow$ 〃 thickening $[1.2, 1.3]$

$n=1 \rightarrow$ سیال نیوتنی

مدل کردن سیال غیرنیوتنی برحسب نیوتنی:

پروفیل سرعت کاملاً توسعه یافته برای سیال نیوتنی $\rightarrow v_x = 2u\left(1-\frac{r^2}{r_i^2}\right)$

$$\rightarrow \underset{\text{wall}}{\dot{\gamma}_{wN}} = \left.\frac{dv_x}{dr}\right|_{r=r_i} = -\frac{4u}{r_i} = -\frac{8u}{d_i} \rightarrow$$ مشخصه جریان

$$\text{or} \rightarrow \dot{\gamma}_{wN} = -\frac{4Q}{\pi r_i^3}$$

$$-\frac{4Q}{\pi r_i^3} = -\frac{8u}{d_i} \rightarrow \frac{8u}{d_i} = \frac{\tau_w}{\mu} \rightarrow$$ سیال نیوتنی

$$\Rightarrow \mu_{ap} = \frac{\text{shear stress at wall}}{\text{flow characteristic}} = \frac{\tau_w}{8u/d_i} \rightarrow$$ غیرنیوتنی

نوشتن تنش برشی روی دیواره برحسب مشخصه جریان
چون دیواره تغییر می‌کند

مشابه قانون توانی $\rightarrow \boxed{\tau_w = k'\left(\frac{8u}{d_i}\right)^{n'}} \rightarrow \boxed{\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_{wN}\left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)}$

نرخ برشی روی دیواره

نرخ برشی دیواره
سیال غیرنیوتنی

عدد رینولدز برای سیال نیوتنی ← $Re = \frac{\rho u d_i}{\mu}$ اگر μ_{ap} را به جای μ قرار دهیم:
عدد رینولدز سیال غیرنیوتنی به دست می‌آید.

$$Re' = \frac{\rho u d_i}{\mu_{ap}} \rightarrow$$

ویسکوزیته سیال غیرنیوتنی و همچنین این سیال همان مشخصه جریانی ← ویسکوزیته ظاهری
$\left(\frac{8u}{d_i}\right)$ را در لحظه‌ای ایجاد می‌کند که سیال نیوتنی ایجاد می‌کند.

$$\tau_w = k'\left(\frac{8u}{d_i}\right)^{n'}$$

$$\mu_{ap} = \frac{\tau_w}{8u/d_i} = k'\left(\frac{8u}{d_i}\right)^{n'-1} \rightarrow \boxed{Re' = \frac{\rho u^{2-n'} d_i^{n'}}{8^{n'-1} k'}}$$

برای سیال نیوتنی $n'=1$ و $k'=\mu$

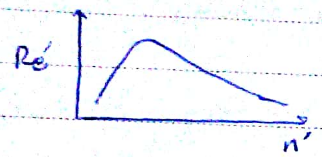
رینولدز سیال غیرنیوتنی

Subject :
Year . Month . Date . ( )

laminar non newtonian flow ⟶ $f = \frac{16}{Re'}$; $f = \frac{64}{Re'}$

Fanning friction

اگر n' سیال رو پیدا کنیم با منحنی اسلاید ۲۹ میتونیم عدد Re' شو پیدا کنیم بعد بگیم لمینار یا توربولانسی



دیاگرام مودی : محور افقی Re' محور عمودی f عدد روی هر خط n'

که دیاگرام مودی برای لوله صاف

که این دیاگرام برای سیال حقیقی توی لوله‌های صاف (smooth) ، یک خط بود . ولی برای غیرنیوتنی‌ها به ازای هر n' مقدار مختلفی دارد.

مثال : سیال غیرنیوتنی با ... با سرعت $2\,m/s$ در تیوپ با ... اسلاید (۳۶)

$$Re' = \frac{\rho u d_i}{\mu_{ap}} \quad ; \quad \mu_{ap} = K'\left(\frac{8u}{d_i}\right)^{n'-1}$$

$$\frac{8u}{d_i} = \frac{8(2\,m/s)}{(0.0762)\,m} = 210\,s^{-1}$$

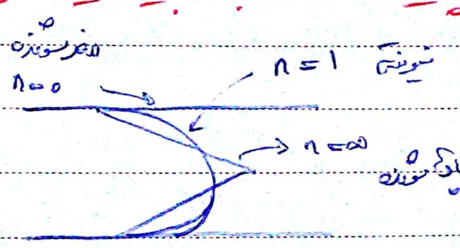
$$\left(\frac{8u}{d_i}\right)^{n'-1} = 210^{(0.3-1)} = 0.0237\,s^{0.7}$$

$$\mu_{ap} = (1.48\,Pa\,s^{0.3})(0.0237\,s^{0.7}) = \boxed{0.0351\,Pa\,s}$$

$$Re' = \frac{(0.0762\,m)(2\,m/s)(961\,kg/m^3)}{(0.0351\,Pa\,s)} = \boxed{4178}$$

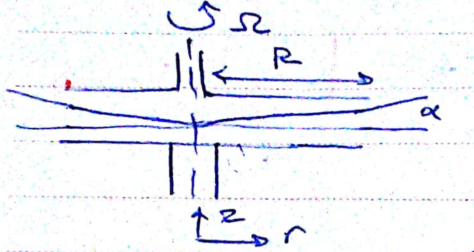
پروفیل سرعت برای جریان لمینار سیال غیرنیوتنی در تیوپ :

$$\frac{v_x}{u} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{r_i}\right)^{(n+1)/n}\right]$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_{max}}{u} = \frac{3n+1}{n+1}}$$

ویسکومتر: سرعت چرخشی Ω و گشتاور در روی لوله رو میشه اندازه گرفت و با دونستن این اطلاعات میشه ویسکوزیته و سیال رو بدست آورد:



$$\dot\gamma = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\Omega r}{\alpha r} = \frac{\Omega}{\alpha}$$

گشتاور المان دیواره در نظر بگیریم مساحتش میشه $2\pi r\,\delta r$. سطح که

همین المان میشه تنش ضربدر سطح . $2\pi r\,\delta r\cdot\tau_{z\theta}$ گشتاور میشه ضربدر بازو $2\pi r^2\delta r\cdot\tau_{z\theta}$

بعد انتگرال گشتاور در میگیریم میزان گشتاور در کل

$$C = 2\pi r\,\tau_{z\theta}\int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3}\tau_{z\theta}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \tau_{z\theta} = \dfrac{3C}{2\pi R^3} \\ \dot\gamma = \dfrac{\Omega}{\alpha} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\mu_a = \frac{3C}{2\pi R^3}\,\frac{\alpha}{\Omega}}$$

محاسبه ویسکوزیته ظاهری با ویسکومتر چرخشی

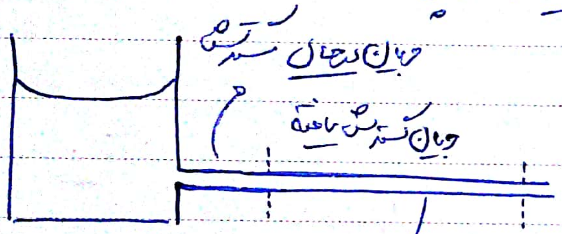
ویسکومترها یا لوله‌ای استوانه هستن که یکیش ثابته یا ... به ویسکومترهای چرخشی

نوع دیگه‌ی ویسکومترها، ویسکومترهای لوله‌ای هستن

با اندازه‌گیری گشتاور و سرعت چرخشی ویسکوزیته محاسبه میشه.

یه جورایی لوله‌ان که سیال وارد لوله‌ی باریک میشه

بعد با اندازه‌گیری سرعت و افت فشار میشه μ رو حساب کرد.



اندازه‌گیری باید توی این ناحیه انجام بشه

توی گسترش یافته میشه سرعت و افت فشار رو حساب کرد:

$$\boxed{\tau_w = \frac{r_i}{2}\left(\frac{\Delta P_f}{L}\right) = \frac{d_i}{4}\left(\frac{\Delta P_f}{L}\right)}$$

پروفیل سرعت $v_x = 2u\left(1-\dfrac{r^2}{r_i^2}\right)$

نرخ برش دیواره برای سیال نیوتنی $\dot\gamma_{wN} = \dfrac{dv_x}{dr}\Big|_{r=r_i} = -\dfrac{8u}{d_i} \longrightarrow \dot\gamma_{wN} = -\dfrac{4Q}{\pi r_i^3}$; $\boxed{\dfrac{8u}{d_i} = \dfrac{4Q}{\pi r_i^3}}$

$$Q = 2\pi\int_0^{r_i} r\,v_x\,dr$$

در کل میشه $\longleftarrow \delta Q = 2\pi r\,\delta r\cdot v_x$

$$Q = 2\pi\left\{\cancel{\left[\frac{r^2 v_x}{2}\right]_0^{r_i}} + \int_0^{r_i}\frac{r^2}{2}\left(-\frac{dv_x}{dr}\right)dr\right\}$$

صفر میشه $\Longrightarrow$ چون v_x رو از صفر تا r_i یعنی از دیواره تا دیواره خواسته و v_x توی دیواره صفره

میشه ۰ − ۰ پس صفره

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادل $\frac{8u}{d_i}$ ← Q رو با آن مرتبط میکنیم

معادل τ_w رو با ΔP مرتبط میکنیم.

$$\Rightarrow Q = \pi \int_0^{r_1} r^2 (-\dot{\gamma})\, dr \qquad \frac{\tau_{rx}}{\tau_w} = \frac{r}{r_1}$$

$$\boxed{\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_{wN}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{d \ln (8u/d_i)}{d \ln \tau_w}\right]}$$

رابطه ی رابینوویچ مونی

← برای هر نوع سیالی به بقیه سیال دیگر رو نشون میده

معمولا توی لوله‌ها که داریم $\frac{8u}{d_i}$ رو بدست میاریم و τ_w رو هم بدست میاریم (τ_w رو با بدست آوردن ΔP توی لوله‌ها و ویسکوزیته بدست میاریم. u رو هم همینطور) بعد منحنی ln ها رو برحسب هم بدست میاریم و رسم می‌کنیم تا n' بدست بیاد و سیال شناخته بشه.

مقادیر زیر برای یک سیال ... $d_i = 6\,mm$ است. افت فشار در فاصله 2 m اندازه‌گیری شده. چگالی سیال $\rho = 870\ kg/m^3$ است. منحنی جریان سیال در دیواره – تنش برشی و سرعت برشی بدست بیارید.

pressur drop (bar)	دبی جرمی Mass flow rate $\times 10^3$ (kg/s)
۰٫۳۸۴	۰٫۸۴۲
۰٫۵۱۹	۰٫۴۴۳
۰٫۷۱۶	۱٫۳۷
۰٫۹۶۵	۲٫۷۶
۱٫۱۶	۴٫۱۳
۱٫۲۹	۵٫۲۰
۱٫۴۶	۶٫۷۸
۱٫۶۰	۸٫۱۵

$$\tau_w = \frac{d_i \Delta P_f}{4L} = \frac{(6\times10^{-3}\,m)}{4(2\,m)}\Delta P_f$$

$$= 7.50\times10^{-4}\,\Delta P_f \quad Pa$$

$\ast$ $\boxed{1\,bar = 10^5\,pa}$

$$\Rightarrow \frac{8u}{d_i} = \frac{4Q}{\pi r_1^3} = \frac{32Q}{\pi d_i^3} = \frac{32M}{\pi d_i^3 \rho}$$

باتوجه به داده‌ها

$$\longrightarrow \frac{8u}{d_i} = \frac{32M}{\pi(6\times10^{-3}m)^3(870\,kg/m^3)} = 54200\,M\,s^{-1}$$

M دبی جرمی → Mass flow rate

$\dot{m} = VA\ (kg/s)$

* شیب منحنی n' است.

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_w = \frac{8u}{d_i}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{d \ln (8u/d_i)}{d \ln \tau_w}\right]$$

$$\boxed{\dot{\gamma}_w = \frac{8u}{d_i}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4n'}\right) = \frac{8u}{d_i}\left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)}$$