

چکیده

در این رساله، ابتدا معادله‌ی پسر-پیشروی گرما را معرفی می‌کنیم. سپس هر کدام از روش‌های تابع شعاعی و المان مرزی را به طور مفصل توضیح خواهیم داد و در ادامه روش تفاضل متناهی برای حالت یک بعدی، روش ترکیبی تفاضل متناهی و پایه شعاعی را برای حالت‌های یک بعدی و دوبعدی و روش تقابل دوگان را برای حالت دوبعدی روی معادله‌ی پسر-پیشرو پیاده‌سازی می‌کنیم. همگرایی و پایداری روش تفاضل متناهی را برای حالت یک بعدی و همگرایی و پایداری زمانی را برای بقیه روش‌ها مورد بررسی قرار خواهیم داد در پایان با ارائه‌ی چند مثال عددی، عملکرد روشهای پیشنهادی را ارزیابی خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: معادله‌ی پسر-پیشرو، تابع پایه شعاعی، روش المان مرزی، روش تقابل

دوگان، روش تفاضل متناهی، روش‌های بدون شبکه.

دانشگاه کردستان

فهرست مطالب

مقدمه	۱
الف- معرفی معادله‌ی پسر و پیشرو گرما	۱
ب- کاربردها	۲
ج- کارهای انجام شده	۳
د- کارهای جدید و اهداف	۵
۱ روش پایه شعاعی	۷
۱-۱- تاریخچه و کاربرد روش پایه شعاعی	۸
۲-۱- روش‌های بدون شبکه	۱۱
۱-۲-۱- روش مانده‌های وزن دار	۱۱
۲-۲-۱- طبقه بندی روش‌های بدون شبکه	۱۵
۳-۱- توابع معین مثبت	۱۶
۴-۱- توابع معین مثبت شعاعی	۱۹
۵-۱- درونیابی با توابع معین مثبت شعاعی	۲۱
۶-۱- توابع بطور مشروط معین مثبت	۲۲
۷-۱- توابع بطور مشروط معین مثبت شعاعی	۲۴
۸-۱- درونیابی با توابع بطور مشروط معین مثبت شعاعی	۲۵
۹-۱- توابع با محمل فشرده	۲۶

۲۸	۱-۱۰- روش‌های انتخاب پارامترشکل
۳۰	۱-۱۰-۱- مقایسه روش‌های انتخاب پارامترشکل با یکدیگر
۳۱	۱-۱۱- مزایا و معایب استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی
۳۲	۲ روش المان مرزی
۳۲	۲-۱- تاریخچه و کاربرد روش <i>BEM</i>
۳۴	۲-۲- تشریح روش <i>BEM</i>
۳۷	۲-۲-۱- حل معادله‌ی لاپلاس
۳۹	۲-۳- حل معادله‌ی پواسون با استفاده از روش <i>DRM</i>
۴۳	۲-۴- پیاده‌سازی <i>DRM</i> با استفاده از المان‌های خطی و ناپیوسته
۴۵	۲-۴-۱- ساختن ماتریس‌های <i>H</i> و <i>G</i>
۴۷	۲-۴-۲- حالت تکینگی
۴۸	۲-۴-۳- ساختن ماتریس‌های \hat{Q} و \hat{U}
۵۰	۲-۴-۴- ماتریس‌های F ، $\frac{\partial F}{\partial x}$ ، $\frac{\partial F}{\partial y}$
۵۲	۳ حل معادله‌ی پسر-پیشرو یک بعدی
۵۲	۳-۱- معرفی مساله‌ی یک بعدی و روش تجزیه‌ی دامنه
۵۴	۳-۲- حل معادله‌ی یک بعدی با استفاده از روش تفاضل متناهی
۵۵	۳-۲-۱- فرمول‌بندی کلی
۵۹	۳-۲-۲- همگرایی
۶۱	۳-۲-۳- استفاده از طرح‌های تفاضلی مراتب بالاتر
۶۲	۳-۲-۴- نتایج عددی
۶۶	۳-۳- روش RBF برای حل معادله‌ی یک بعدی
۷۰	۳-۳-۱- به کارگیری روش تکراری تجزیه‌ی دامنه

۷۲	نتایج عددی ۲-۳-۳
۷۸	حل معادله‌ی پسر و پیشرو دوبره‌ی ۴
۷۸	۱-۴ - معرفی مساله‌ی دو بره‌ی و روش تجزیه‌ی دامنه
۷۹	۲-۴ - روش تکراری پایه شعاعی- تفاضل متناهی
۸۰	۱-۲-۴ - گسسته‌سازی زمانی
۸۱	۲-۲-۴ - گسسته‌سازی مکانی
۸۵	۳-۲-۴ - روش تکراری
۸۷	۴-۲-۴ - نتایج عددی
	۳-۴ - روش غیر تکراری پایه شعاعی- تفاضل متناهی و استفاده از الگوریتم
۹۵	نقاط تعدیل شده
۹۶	۱-۳-۴ - روند الگوریتم
۹۷	۲-۳-۴ - نتایج عددی
۱۰۱	۴-۴ - روش <i>DRM</i>
۱۰۱	۱-۴-۴ - گسسته‌سازی زمانی
۱۰۲	۲-۴-۴ - فرمول بندی <i>DRM</i>
۱۰۷	۳-۴-۴ - نتایج عددی
۱۱۲	۵ - پایداری و همگرایی روش تفاضل متناهی زمانی
۱۲۱	۶ - جمع بندی و پیشنهادات
۱۲۴	منابع
۱۳۱	مقالات مستخرج از این رساله
۱۳۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی



دانشگاه کردستان

فهرست جداول

- جدول ۱-۳: خطای عددی تولید شده از حالت اول ۶۳
- جدول ۲-۳: خطای عددی تولید شده از حالت دوم ۶۴
- جدول ۳-۳: مقایسه‌ی مقادیر خطا در حالت دوم با نتایج عددی روش
تکراری قبلی با تعداد تکرار K با استفاده از Max error . . . ۶۵
- جدول ۴-۳: مقادیر خطا در حالت $\epsilon = 0.5$ برای مثال ۱-۳-۳ ۷۴
- جدول ۵-۳: مقادیر خطا در حالت $\epsilon = 1/4$ برای مثال ۱-۳-۳ ۷۴
- جدول ۶-۳: مقایسه‌ی خطای ماکزیمم در مثال ۱-۳-۳ با نتایج عددی
روش‌های قبلی ۷۵
- جدول ۷-۳: مقادیر خطای روش برای مثال ۲-۳-۳ ۷۶
- جدول ۸-۳: مقادیر خطای روش برای مثال ۲-۳-۳ ۷۷
- جدول ۱-۴: مقادیر خطای مثال ۱-۲-۴ در ناحیه‌ی مستطیلی ۸۹
- جدول ۲-۴: مقادیر خطای مثال ۱-۲-۴ در ناحیه‌ی نیم دایره‌ای ۸۹
- جدول ۳-۴: مقادیر خطای مثال ۲-۲-۴ در ناحیه‌ی مستطیلی ۹۰
- جدول ۴-۴: مقادیر خطای مثال ۲-۲-۴ در ناحیه‌ی نیم دایره‌ای ۹۱
- جدول ۵-۴: مقادیر خطای مثال ۳-۲-۴ در ناحیه‌ی مستطیلی ۹۳
- جدول ۶-۴: مقادیر خطای مثال ۳-۲-۴ در ناحیه‌ی نیم دایره‌ای ۹۳

جدول ۴-۷: مقایسه‌ی دقت، عدد شرطی و زمان CPU بین دو توزیع یکنواخت

و تعدیل شده در بازه‌ی $[0, 1] \times [-1, 1]$ با $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$

جدول ۴-۸: مقایسه‌ی دقت، عدد شرطی و زمان CPU بین دو توزیع یکنواخت

و اصلاح شده در دامنه نیم دایره‌ای با $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$

جدول ۴-۹: مقادیر خطای مثال (۴-۴-۱) در ناحیه‌ی مستطیلی ۱۰۹

جدول ۴-۱۰: مقادیر خطای مثال (۴-۴-۱) در ناحیه‌ی نیم دایره‌ای ۱۰۹

جدول ۴-۱۱: مقادیر خطای مثال (۴-۴-۲) در ناحیه‌ی مستطیلی ۱۱۱

جدول ۴-۱۲: مقادیر خطای مثال (۴-۴-۲) در ناحیه‌ی نیم دایره‌ای ۱۱۱

دانشگاه کردستان

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱: طرح تجزیه‌ی دامنه در حالت یک بعدی ۳
- شکل ۲: طرح تجزیه‌ی دامنه در حالت دو بعدی ۴
- شکل ۱-۱: نمودار تابع گوسی با دو پارامتر شکل متفاوت ۲۹
- شکل ۱-۲: بازسازی یک تابع هموار با استفاده از تابع گوسی با (به ترتیب از چپ): $\sigma = 0.3$ ، $\sigma = 0.1$ و $\sigma = 0.3$ ۳۰
- شکل ۱-۳: پارامتر شکل ثابت، نمایی و خطی، راست: پارامتر ۳۰
- شکل تصادفی ۳۰
- شکل ۱-۳: طرح‌های تجزیه‌ی دامنه و تفاضل متناهی ۵۵
- شکل ۲-۳: مقایسه‌ی جواب دقیق و جواب عددی حالت اول با استفاده از $M = 70$ و $N = 35$ و تصویر تابع خطا. ۶۳
- شکل ۳-۳: مقایسه‌ی جواب دقیق و جواب عددی حالت دوم با استفاده از $M = 70$ و $N = 35$ و تصویر تابع خطا. ۶۵
- شکل ۳-۴: تصویر مقادیر خطا در سمت چپ و مقایسه‌ی جواب‌های دقیق و تقریبی در سمت راست با $N = 8$ ، $M = 16$ و $\epsilon = 0.14$ ۷۴
- در مثال ۱-۳-۳ ۷۴

شکل ۳-۵: تصویر مقادیر خطا در سمت چپ و مقایسه‌ی جواب‌های دقیق

و تقریبی در سمت راست با $N = 16$ ، $M = 64$ و $\epsilon = 0.84$

در مثال ۳-۳-۱ ۷۵

شکل ۳-۶: تصاویر مقادیر خطا و مقایسه‌ی جواب‌های دقیق و تقریبی به

ترتیب در سمت چپ و راست به ازای $N = 20$ ، $M = 20$ و

۷۷ $\epsilon = 1.54$

شکل ۴-۱: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = 145$ ، $N^{(2)} =$

145 ، $M = 80$ و $k = 28$ در زمان $t = 0.5$ برای مثال ۴-

۸۸ ۱-۲

شکل ۴-۲: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 145$ ، $N^{(2)} = 145$ ، $M =$

80 و $k = 28$ در زمانهای $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای

مثال ۴-۲-۱ ۸۸

شکل ۴-۳: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} =$

170 ، $M = 50$ و $k = 42$ در زمان $t = 0.5$ برای مثال ۴-

۹۱ ۲-۲

شکل ۴-۴: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} = 170$ ، $M =$

50 و $k = 42$ در زمانهای $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای

مثال ۴-۲-۲ ۹۲

شکل ۴-۵: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} =$

170 ، $M = 50$ و $k = 40$ در زمان $t = 0.5$ برای مثال ۴-

۹۴ ۳-۲

شکل ۴-۶: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} = 170$ ، $M =$

و 50 و $k = 42$ در زمانهای $0/2, 0/4, 0/6, 0/8$ برای $t =$

مثال ۴-۲-۳ ۹۴

شکل ۴-۷: تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده در بازه $[-1, 1] \times$

$[0, 1]$ با $\delta t = 0/001$ و $T = 0/5$ ۹۸

شکل ۴-۸: خطای مطلق روی بازه $[0, 1] \times [-1, 1]$ با $N = 1058$ ،

$\delta t = 0/001$ و $T = 0/5$ ۹۹

شکل ۴-۹: تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده در دامنه نیم دایره‌ای

با $\delta t = 0/001$ و $T = 0/5$ ۱۰۰

شکل ۴-۱۰: خطای مطلق روی دامنه نیم دایره‌ای با $N = 1058$ ،

$\delta t = 0/001$ و $T = 0/5$ ۱۰۱

شکل ۴-۱۱: تقسیم دامنه نیم دایره‌ای به دو زیردامنه Ω_1 و Ω_2 ۱۰۸



مقدمه

الف- معرفی معادله‌ی پسر و- پیشرو گرما

در این پایان نامه، معادله‌ی پیشرو-پسر و گرما را در دو حالت یک بعدی و دوبعدی مکانی بررسی می‌کنیم. در حالت کلی این معادله به شکل زیر معرفی می‌شود

$$a(X)u_t - \nabla^2 u = f(X, t) \quad , \quad X \in \Omega \subset R^n, \quad t \in (0, t_f), \quad (1)$$

که در آن شرایط مرزی به صورت زیر است

$$u(X, t) = \bar{u}(X, t) \quad , \quad X \in \Gamma \quad , \quad t \in (0, t_f], \quad (2)$$

و همچنین شرایط اولیه و نهایی به صورت زیر معرفی می‌شود

$$u(X, 0) = T_0(X) \quad , \quad X \in \bar{\Omega}_2 \setminus \Gamma_I, \quad (3)$$

$$u(X, t_f) = T_f(X) \quad , \quad X \in \bar{\Omega}_1 \setminus \Gamma_I,$$

که در آن دامنه‌ی $\Omega \subset R^n$ بوسیله‌ی مرز مجازی Γ_I به دو زیردامنه‌ی Ω_1 و Ω_2 قابل تقسیم

است که به ترتیب دو مساله‌ی پسر و پیشرو را بوجود می‌آورند. در هر کدام از مسایل پسر و

پیشرو به ترتیب $a(X) > 0$ و $a(X) < 0$ برقرار است و روی مرز مجازی نیز داریم

$$a(X) = 0$$

ب- کاربردها

معادله‌ی پسر-پیشروی گرما کاربردهای متعددی در حوزه‌های مختلف دارد که برخی از آنها را به صورت زیر خلاصه کرده‌ایم:

• ذره‌ی شتابدار تصادفی

در این مساله، تعیین زمان یک ذره مد نظر است که حرکت آن محدود به یک پاره‌خط با موقعیت مکانی اولیه و یک سرعت اولیه است. که در آن یک شتاب تصادفی، ذره را به نقاط مرزی پاره‌خط میل می‌دهد. برای درک بهتر این مساله، به [۹] رجوع کنید.

• مدل پرتو الکترونی لاروسا

در این مساله، توزیع سرعت پرتو الکترونی مد نظر است که در آن تعداد الکترونهاي موجود در مکان x و زمان t را که با سرعت v در حرکت‌اند، اندازه می‌گیرند [۱۵].

• معادلات لایه‌ی مرزی پراندتل

این معادله از جریان سیال دو بعدی نزدیک یک مرز هنگامی که جداسازی روی می‌دهد، بدست می‌آید. با شروع از معادلات بدون بعد ناویر-استوکس برای یک سیال تراکم ناپذیر چسبناک و در نظر گرفتن جریان در نزدیکی مرزها، یک معادله‌ی گرمای پسر-پیشروی غیر خطی بدست می‌آید [۱۶].

• انتقال در طی واژگونی جریان

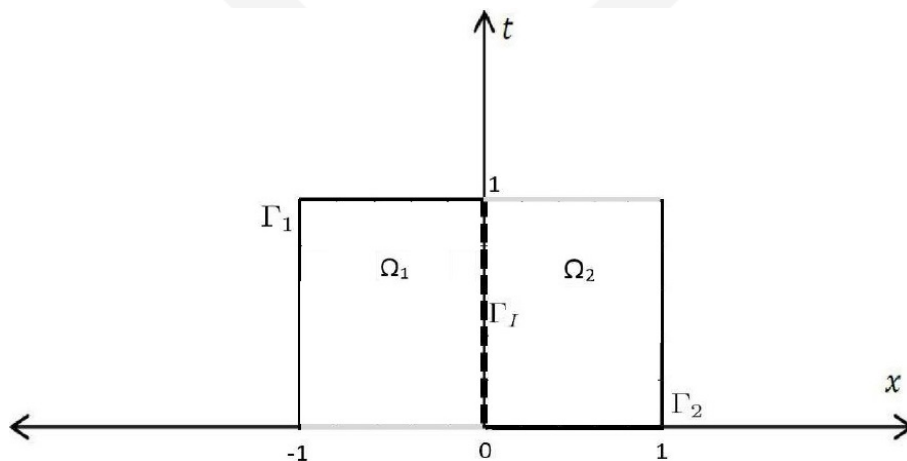
مدل سازی این مساله از طریق جریان انتقال غالب درجه حرارت یا آلاینده و یا نمک در لایه‌ی مرزی یک سیال که دستخوش واژگونی یا جدایی جریان می‌شود، انجام می‌شود. برای جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه کنید.

• پراکندگی نوترون

این مساله نیز یکی دیگر از کاربردهایی است که مدل آن به صورت یک معادله‌ی پسر-پیشرو گرما است.

ج- کارهای انجام شده

جواب عددی و تحلیلی معادله‌ی پسر-پیشروی گرما در طول ۳ دهه اخیر [۲، ۲۲، ۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. اگر $n = 1$ باشد، معادله پسر-پیشرو مورد نظر، یک معادله‌ی یک بعدی مکانی خواهد بود که اگر دامنه را به صورت $\Omega = [-1, 1]$ در نظر بگیریم، شکل آن به صورت ۱ خواهد بود.

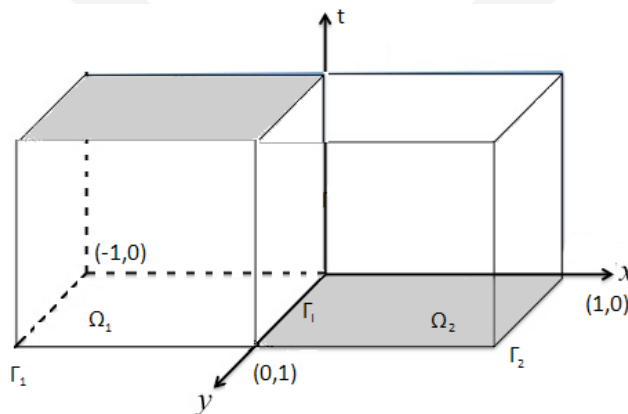


شکل ۱: طرح تجزیه‌ی دامنه در حالت یک بعدی

مساله‌ی پسر-پیشرو با استفاده از روش‌های متعددی مانند روش تفاضل متناهی [۸، ۷]، روش تبدیل به معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول [۲۱]، روش کمترین مربعات [۵]، روش عناصر متناهی گالرکین [۱۴، ۱۰، ۱۱، ۲۳] حل شده است.

روش تلفیقی تجزیه‌ی دامنه و تفاضلات متناهی برای حل این مساله در حالت یک بعدی، به وفور برای حل این مساله استفاده شده است ([۸، ۱۹]). به علاوه، جنبه‌های تئوری مساله نیز در کارهای متفاوتی بحث شده است [۶، ۳، ۱۷]. همگرایی روش ارایه شده توسط داوود برای حل این مساله در [۸] بررسی شده است. کانزتسو یکتایی جواب را برای معادله‌ی پسر-پیشروی سهموی با شرایط مرزی دیریکله به اثبات رسانده است و نشان داده است که شرایط اولیه و نهایی باید به فرم نامعادله فرمول بندی شوند [۴]. پارونتو وجود و یکتایی جواب را برای مسایل بیضوی با پارامتر کوچک در نظر گرفته است و همگرایی جواب را برای دسته‌ای از معادلات پسر-پیشرو ترکیبی بیضوی-سهموی و نیز معادلات پسر-پیشرو سهموی اثبات کرده است [۱۸].

معادله‌ی پسر-پیشروی دوبعدی ($n = 2$) با یک دامنه‌ی مستطیلی $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$ در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲: طرح تجزیه‌ی دامنه در حالت دو بعدی

فصل اول

روش پایه شعاعی

تعریف ۱-۰-۱. تابع $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را شعاعی گوئیم هرگاه تابعی مانند $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، به طوری که:

$$\phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است [۳۳].

تعریف ۲-۰-۱. مجموعه توابع $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ را توابع پایه شعاعی گوئیم هرگاه B یک پایه و هر یک از ϕ_i ها یک تابع شعاعی باشد.

جدولی از توابع پایه شعاعی را در پیوست الف و همچنین نمودار دوبعدی آنها در پیوست ب ارائه شده است.

کرد که برای N نقطه پراکنده مجزا و داده شده $\{x_j\}_{j=1}^N$ و N مقدار متناظر $\{f_j\}_{j=1}^N$ ، می‌توان درونیاب را برای تقریب تابع f بدین صورت در نظر گرفت:

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j |x - x_j|, \quad (1-1)$$

به طوری که مقادیر مجهول $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ با استفاده از شرایط درونیابی $f_j = S(x_j)$ ، $j = 1, 2, \dots, N$ مشخص می‌شوند. از لحاظ هندسی، این روش درونیابی داده‌ها با یک ترکیب خطی از N انتقال تابع $|x|$ است، به طوری که رأس $|x|$ به نقاط داده شده انتقال می‌یابد (در واقع می‌توان گفت که تابع $|x|$ در این نقاط مرکزدهی می‌شود).

هاردی خیلی زود متوجه شد که درونیاب مورد نظر با دقت خوبی می‌تواند یک صخره را مدل‌بندی کند ولی در عین حال چون مشتق اول آن در نقاط داده شده پیوسته نیست، قادر به پیدا کردن قله‌ها (ماکزیمم‌ها) و دره‌ها (مینیمم‌ها) نیست. بنابراین نتیجه گرفت که اگر تابع قدرمطلق در ضابطه درونیاب را با تابعی که به طور پیوسته مشتق‌پذیر است جایگزین کند، مشکل حل خواهد شد. بنابراین آن را با تابع هاردی $\sqrt{\sigma^2 + x^2}$ ، که در آن σ ثابت غیر صفر دلخواه است، جایگزین کرد [۲۶]، σ را اصطلاحاً پارامتر شکل^۱ می‌نامند. ضابطه درونیاب جدید به این صورت تبدیل شد:

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{\sigma^2 + (x - x_j)^2} \quad (2-1)$$

که در آن ضرایب مجهول $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ با استفاده از شرایط درونیابی تعیین می‌شوند. توجه می‌کنیم که در تابع درونیاب (۲-۱)، وقتی $\sigma \neq 0$ ، درونیاب به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و اگر $\sigma = 0$ ، همان ضابطه درونیاب (۱-۱) بدست می‌آید. همچنین، همان تعبیر هندسی قبل، در مورد ضابطه جدید صادق است. حال هاردی می‌توانست با درونیاب جدید، نمایش دقیقی از مناطقی که مورد

1. ShapeParameter

جزئی استفاده کرد [۲۹، ۳۰]. پلات ۱ و دریسکول ۲ در سال ۲۰۰۳ روش توابع پایه‌ای شعاعی را برای مسائل با مقادیر ویژه بسط دادند [۳۱].

همان‌طور که در بالا مشاهده شد تابع هاردی شامل یک پارامتر آزاد σ یا در اصطلاح پارامتر شکل σ می‌باشد. اکثر توابع پایه‌ای شعاعی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرند شامل این پارامتر شکل هستند. دقت بسیاری از روش‌های درونیابی داده‌های پراکنده با توابع پایه‌ای شعاعی به پارامتر شکل σ تابع پایه‌ای شعاعی وابسته است.

۱-۲- روش‌های بدون شبکه

تمامی روش‌های بدون شبکه را می‌توان به نوعی از روش باقیمانده‌های وزن دار بدست آورد. یعنی در واقع، تمامی روش‌های بدون شبکه، حالت خاصی از روش باقیمانده‌های وزن دار می‌باشند. در اینجا کلیاتی از این روش را یادآوری می‌کنیم.

۱-۲-۱- روش مانده‌های وزن دار

در این بخش، ابتدا صورت کلی روش مانده‌های وزن دار را مطرح می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که روش‌های معروفی مانند گالرکین، حداقل مربعات و ... حالت‌های خاصی از این روش هستند. برای توصیف این روش، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L}u = f, \quad \text{in } \Omega \quad (۳-۱)$$

1. *Platte*
2. *Driscoll*

که در آن \mathcal{L} یک عملگر خطی یا غیر خطی است که روی تابع مجهول u عمل می‌کند و f تابعی معلوم است. در روش باقیمانده‌های وزن دار، ابتدا u را با عبارت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x), \quad (4-1)$$

که ϕ_j ها توابع پایه‌ای تقریب (یا توابع آزمایش یا توابع شکل) نام دارند. با جایگذاری تقریب (4-1) در معادله (3-1) داریم:

$$\mathcal{L}\tilde{u} \approx f, \quad \text{in } \Omega \quad (5-1)$$

در این حالت

$$R = \mathcal{L}\tilde{u} - f = \mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \right) - f,$$

را مانده می‌نامیم. سپس همانطور که از نام این روش بر می‌آید، ضرایب c_j را طوری تعیین می‌کنیم که مانده R در یک مفهوم انتگرالی وزن دار برابر صفر شود:

$$\int_{\Omega} \psi_i(x) R(x, c_j) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6-1)$$

که در آن ψ_i ها توابع وزن یا توابع آزمون نام دارند و در حالت کلی با توابع پایه‌ای تقریب (ϕ_i ها) یکسان نیستند. مجموعه توابع $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ باید مستقل خطی باشند؛ در غیر این صورت دستگاه معادلات (6-1) وابسته خطی خواهد بود و لذا قابل حل نیست.

با انتخاب توابع وزن متفاوت روش‌های متفاوتی ایجاد می‌شود که در زیر مختصراً به آنها اشاره

می‌کنیم.

که ضرایب حقیقی $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ را می‌توان از اعمال شرایط درونیابی به دست آورد، در این صورت ماتریس درونیاب نامفرد A به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) \\ \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) \end{bmatrix} \quad (14-1)$$

۱-۶- توابع بطور مشروط معین مثبت

توابعی که بر یک فضای برداری خاص از λ ها معین مثبت هستند را توابع بطور مشروط معین مثبت گوییم. تعریف دقیق‌تر این گونه توابع در زیر ارائه شده است. در واقع به دلیل دقت بالا این توابع مورد توجه هستند، همچنان که اولین بار هاردی از این نوع توابع (تابع چند مربعی) استفاده کرد.

تعریف ۱-۶-۱. تابع پیوسته $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ را نیمه معین مثبت شرطی از مرتبه m گوییم اگر برای هر $N \in \mathbb{N}$ ، هر مجموعه از مراکز دو به دو مجزای $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}^N$ که در رابطه:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p(\mathbf{x}_j) = 0 \quad (15-1)$$

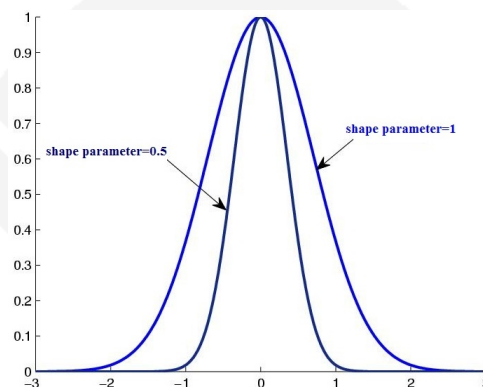
برای تمام چند جمله‌ای‌های مختلط از درجه کمتر از m صدق می‌کند، داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_j \bar{\lambda}_k \phi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \geq 0. \quad (16-1)$$

همچنین ϕ را بطور مشروط معین مثبت از مرتبه m گوییم اگر معادله (۱۵-۱) برای هر $\lambda \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ ، مثبت باشد.

در این بخش، دو طریقه انتخاب پارامتر شکل را که عمدتاً مورد استفاده قرار می‌گیرند به طور مختصر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

به منظور بیان میزان تاثیرگذاری پارامتر شکل در اینجا مثالی ارائه می‌دهیم. در شکل (۱-۱)، نمودارهای تابع گوسی $e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$ وقتی که $\sigma = 1$ و $\sigma = \frac{1}{2}$ رسم شده است.



شکل ۱-۱: نمودار تابع گوسی با دو پارامتر شکل متفاوت

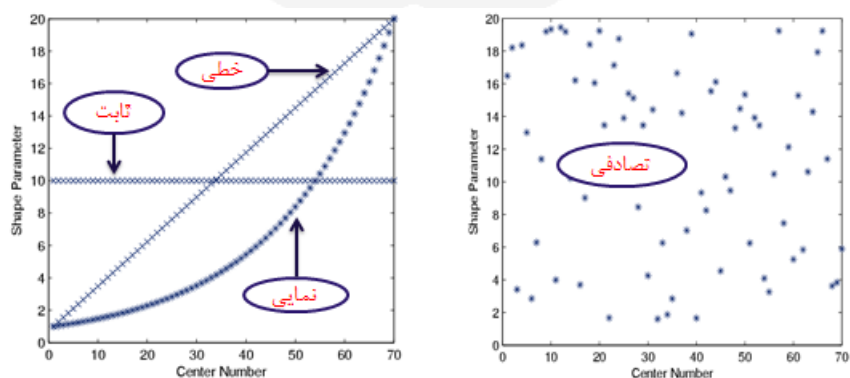
اگر σ خیلی کوچک باشد آنگاه این تابع دارای قله‌های تَند خواهد بود که نتیجه‌اش ظاهر شدن ماتریس درونیاب (۱-۱۴) با عدد حالت کوچک و تقریباً قطری است ولی در این صورت ارائه‌ی خوبی از سطح بازسازی شده نخواهیم داشت، در حالی که هر چند با پارامتر شکل بزرگتر ماتریس درونیاب از قطری بودن فاصله گرفته و دارای عدد حالت بزرگ‌تری می‌شود ولی تصویر ارائه شده در بازسازی سطح دارای دقت بیشتری خواهد بود. شکل (۱-۲)، تأثیر پارامتر شکل را در بازسازی سطح تولید شده توسط یک تابع هموار نشان می‌دهد. توجه داریم که در سمت چپ با $\sigma = 0.3$ شاهد تقریب بهتری هستیم.



شکل ۱-۲: بازسازی یک تابع هموار با استفاده از تابع گوسی با (به ترتیب از چپ):
 $\sigma = 0.3$ و $\sigma = 0.1$ ، $\sigma = 0.3$

۱-۱۰-۱ - مقایسه روش‌های انتخاب پارامتر شکل با یکدیگر

نویسندگان در [۴۴] مقایساتی را بین پارامتر شکل ثابت و سه پارامتر شکل متغیر معرفی شده، برای چندین مثال متفاوت در مسئله درونیایی یک بُعدی و دو بُعدی و همچنین یک مسئله مقدار مرزی مستقل از زمان در دو بُعد، انجام داده‌اند. نتایج حاکی از آن است که پارامتر شکل متغیر تصادفی در اغلب موارد نتایج بهتری نسبت به پارامتر شکل‌های دیگر بدست می‌دهد. شکل (۱)-۳، طریقه انتخاب پارامتر شکل به روش‌های مختلف را نشان می‌دهد که در تمام آن‌ها $N = 70$ ، $\sigma_{min} = 1$ و $\sigma_{max} = 20$ است. پارامتر شکل ثابت نیز برابر $\sigma = 10$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱-۳: چپ: پارامتر شکل ثابت، نمایی و خطی، راست: پارامتر شکل تصادفی

۲-۲- تشریح روش BEM

در این قسمت به صورت مختصر روش مانده‌ی وزندار را که مبنای روش BEM است بیشتر توضیح می‌دهیم. برای انجام این امر، معادله‌ی پواسون زیر را در نظر بگیرید

$$\nabla^2(u) = b \quad \text{in } \Omega \quad (1-2)$$

که در آن

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

یک عملگر لاپلاس است، x_1 و x_2 متغیرهای مکانی هستند و b تابعی معلوم از این دو متغیر است. دامنه‌ی Ω دارای مرز Γ است و شرایط مرزی به صورت زیر است

$$\begin{cases} u = \bar{u} & \text{on } \Gamma_1, \\ q = \bar{q} & \text{on } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2-2)$$

که در آن $q = \partial u / \partial n$ بردار نرمال خارجی روی مرز $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ است و \bar{u} و \bar{q} توابعی معلوم هستند.

فرض کنید u جواب تقریب معادله‌ی (۱-۲) باشد. توابع مانده برای معادله‌ی اصلی و شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R = \nabla^2 u - b \neq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2.$$

به وضوح می‌توان مشاهده کرد که مقادیر مانده، مقدار خطاهایی هستند که از جواب تقریبی

بدست می‌آیند. ایده‌ی اصلی تکنیک مانده‌ی وزندار، انتخاب u هایی است که با استفاده از تعامد نسبت به توابع وزن u^* مقادیر خطا را کاهش می‌دهند. بنابراین داریم

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega = 0. \quad (3-2)$$

اکنون قضیه‌ی دوم گرین را یادآوری می‌کنیم

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 u) u^* - (\nabla^2 u^*) u] d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} u^* - \frac{\partial u^*}{\partial n} u \right) d\Gamma. \quad (4-2)$$

که با استفاده از این قضیه و شرایط مرزی، می‌توان معادله‌ی (۲-۲) را به صورت زیر نوشت

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = 0. \quad (5-2)$$

به عبارت دیگر

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega - \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma = 0, \quad (6-2)$$

که در آن $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ است. برای توضیح این روش با استفاده از دسته‌ای از توابع، فرض کنید

که جواب تقریبی u ترکیبی خطی از توابع ϕ_i باشد. بنابراین داریم

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \quad (7-2)$$

که در آن ϕ_i ها تابع‌های مستقل خطی و α_i ها ضرایب نامعلوم هستند. اکنون باید مقدار R را تا حد امکان کوچک کنیم که این امر با استفاده از مقادیر متعددی از توابع وزن ψ_j انجام‌پذیر است

که به ازای آنها مانده‌ی وزندار صفر می‌شود. بنابراین داریم

$$\int_{\Omega} R \psi_j d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (8-2)$$

۲-۲-۱- حل معادله‌ی لاپلاس

در این قسمت فرمول‌بندی معادله‌ی انتگرال مرزی را برای معادله‌ی لاپلاس بررسی می‌کنیم.

با اعمال روش مانده‌ی وزندار و استفاده از قضیه‌ی گرین، داریم

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma. \quad (۱۰-۲)$$

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی (۱۰-۲) را به یک معادله‌ی انتگرال مرزی تبدیل کنیم. مفهوم جواب اساسی نقش مهمی را در حذف انتگرال دامنه‌ای سمت چپ معادله‌ی فوق ایفا می‌کند. جواب اساسی u^* تابعی است که در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند، اما لزوماً شرایط مرزی را برآورده نمی‌کند. این تابع در نقطه‌ای مانند x_i عمل می‌کند و در این نقطه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین داریم

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0, \quad (۱۱-۲)$$

که در آن Δ_i یک دلتای دیراک است که در $x = x_i$ به سمت بی‌نهایت افزایش می‌یابد و در بقیه نقاط برابر صفر است. انتگرال تابع دلتای دیراک که در یک تابع مانند u ضرب شده باشد، با مقدار آن تابع در نقطه‌ی x_i برابر است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = \int_{\Omega} (-\Delta_i) u d\Omega = -u_i, \quad (۱۲-۲)$$

که در آن $u_i = u(x_i)$. در نتیجه معادله‌ی (۱۰-۲) به شکل زیر خواهد بود

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma. \quad (۱۳-۲)$$

برای دامنه‌ی دوبعدی، جواب اساسی به صورت زیر است

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right),$$

و برای دامنه‌ی سه‌بعدی داریم

$$u^* = \frac{1}{4\pi r},$$

که در آن r فاصله‌ی بین نقطه‌ی x_i و هر یک از نقاط مورد بررسی است. اکنون نشان می‌دهیم که توابع فوق در حالت دوبعدی در معادله‌ی (۱۱-۲) صدق می‌کند. برای نقطه‌ی چشمه x_i و هر کدام از نقاط میدان $x_i \neq x_j$ با توجه به اینکه $r \neq 0$ ، به سادگی ثابت کرد که u^* در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند که بر $\Delta_i = 0$ دلالت دارد. اگر $x_i = x_j$ ، آنکاه $r = 0$ و (۱۱-۲) را می‌توان با تعریف دایره‌های کوچک با شعاع ϵ و بدست آوردن حد آن برای $\epsilon \rightarrow 0$ ، ثابت کرد. برای این منظور، اگر قضیه‌ی گرین را برای بیان لاپلاسیان در عبارات مشتق مرزی q^* استفاده کنیم، داریم

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma,$$

که در آن Ω_ϵ و Γ_ϵ به ترتیب دامنه و مرز دایره هستند. چون روی محیط دایره $n \equiv r$ برقرار

است، پس $\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}$ و لذا می‌توان نوشت

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} -\frac{1}{2\pi r} d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{2\pi\epsilon}{2\pi\epsilon}\right] = -1,$$

و این ثابت می‌کند که

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta_i d\Omega = -1.$$

معادله‌ی انتگرال (۱۳-۲) فقط برای نقاط دامنه‌ای معتبر است. در حالی که نقاط مرزی

باشند، نیم دایره‌ای با مرکز x_i و شعاع ϵ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم

$$u_i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} qu^* d\Gamma. \quad (14-2)$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} qu^* d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) d\Gamma \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \pi \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (15-2)$$

و بنابراین

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} uq^* d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\left(\int_{\Gamma_{\epsilon}} u \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} d\Gamma\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} u_i. \quad (16-2)$$

با جایگذاری (۱-۲-۲) و (۱۶-۲) در (۱۴-۲)، فرم زیر را برای معادله‌ی انتگرال نقاط مرزی خواهیم داشت

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} u_i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma. \quad (17-2)$$

۲-۳- حل معادله‌ی پواسون با استفاده از روش *DRM*

در این بخش فرمول بندی اساسی روش *DRM* را برای یک معادله‌ی پواسونی بررسی

می‌کنیم. ابتدا ساده‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم

$$\nabla^2 u = b \quad \text{in } \Omega, \quad (18-2)$$

که در آن $b = b(x, y)$ یک تابع معلوم است. برای توضیح این روش، فرض کنید توابع معلوم $f_j(x, y)$ و $\hat{u}_j(x, y)$ را به صورت زیر داشته باشیم

$$b = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j(x, y) \quad \text{and} \quad \nabla^2 \hat{u}_j = f_j, \quad (19-2)$$

لذا داریم

$$b = \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla^2 \hat{u}_j = \nabla^2 \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \hat{u}_j \right).$$

در نتیجه، $\sum_{j=1}^N \alpha_j \hat{u}_j$ یک جواب خصوصی برای معادله‌ی (۱۸-۲) است و روش جواب خصوصی را می‌توان به کار برد. این موضوع، مبنای روش *DRM* می‌باشد، اگرچه عملاً جایگذاری تابع b با استفاده از مجموع (۱۹-۲) امکان‌پذیر نمی‌باشد و باید آنرا با استفاده از *RBF*ها تقریب نمود. فرض کنید تابع b را با استفاده از یک سری *RBF* مانند ϕ_j در N نقطه‌ی مرزی و L نقطه‌ی درونی به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \phi_j(r). \quad (20-2)$$

همچنین فرض کنید توابعی مانند \hat{u}_j وجود داشته باشند به طوری که $\nabla^2 \hat{u}_j = \phi_j(r)$

برقرار باشد، بنابراین معادله‌ی (۲۰-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 (\hat{u}_j). \quad (21-2)$$

یا جایگذاری عبارت (۲۱-۲) در معادله‌ی (۱۸-۲) داریم

$$\nabla^2 u \approx \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 (\hat{u}_j). \quad (22-2)$$

با استفاده از تکنیک مانده‌ی وزنی، نتیجه می‌شود

$$\int_{\Omega} (\nabla^{\nu} u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^{\nu} \hat{u}_j) u^* d\Omega, \quad (23-2)$$

اکنون با استفاده از قضیه‌ی گرین و با به‌کارگیری جواب اساسی معادله‌ی لاپلاس در نقاط

مرزی، معادله‌ی زیر بدست می‌آید

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{q}_j u^* d\Gamma \right), \quad (24-2)$$

که در آن $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n}$. در گام بعدی معادله‌ی (۲-۳) را گسسته‌سازی می‌کنیم، بنابراین

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q u^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{q}_j u^* d\Gamma \right) \quad (25-2)$$

اگرچه در معادله‌ی فوق \hat{u} و \hat{q} معلوم هستند و نیازی به محاسبه‌ی آنها نیست، اما به دلیل

سازگاری، پیشنهاد می‌شود که آنها را مانند u و q ، با همان تابع درونیاب تقریب بزیم. در [۵۴]

ثابت شده است که این رویه، کارایی روش را افزایش می‌دهد و همچنین تاثیر زیادی روی دقت

جواب نمی‌گذارد. برای سادگی، ابتدا فرمول‌بندی حالت المان ثابت را ارایه می‌کنیم و استفاده از

المان خطی را در قسمت ۲-۴ بررسی می‌کنیم و با استفاده از ماتریس‌های H و G که آنها را

برای حالت المان ثابت بررسی خواهیم کرد، معادله‌ی (۲-۳) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{\nu} u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\frac{1}{\nu} \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right), \quad (26-2)$$

که بالانویس‌های i ، k و j به ترتیب نقاط هم محلی، نقاط میدان مرزی و تمام نقاط مورد بحث را

نشان می‌دهند. اگر مقادیر \hat{u}_j و \hat{q}_j را در نقاط مرزی به ترتیب با بردارهای $\hat{\mathbf{u}}_j$ و $\hat{\mathbf{q}}_j$ نشان دهیم، معادله (۳-۲) شکل ماتریسی زیر را خواهد داشت

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (H\hat{\mathbf{u}}_j - G\hat{\mathbf{q}}_j), \quad (27-2)$$

که در آن \mathbf{u} و \mathbf{q} به ترتیب بردارهای شامل مقادیر توابع u و q در نقاط مرزی هستند. با استفاده از ماتریس‌های \hat{U} و \hat{Q} به صورت زیر

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_{N+L} \end{bmatrix} \quad (28-2)$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \cdots & \hat{q}_{N+L} \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات جبری زیر حاصل می‌شود

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha, \quad (29-2)$$

که در آن α از (۲۰-۲) با استفاده از $\alpha = F^{-1}\mathbf{b}$ بدست می‌آید و \mathbf{b} برداری است که شامل مقادیر تابع b در نقاط درونیابی می‌باشد. بنابراین معادله‌ی (۲۹-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$H\mathbf{u} - G\mathbf{q} = d, \quad \xrightarrow{\text{که}} \quad d = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}\mathbf{b}, \quad (30-2)$$

بنابراین در آن H و G ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی $N \times N$ ، \hat{U} و \hat{Q} از مرتبه‌ی $N \times (N+L)$ ، F^{-1} از مرتبه‌ی $(N+L) \times (N+L)$ هستند. همچنین u ، q و d بردارهایی از مرتبه N و b برداری از مرتبه‌ی $N+L$ می‌باشد. بعد از جداسازی مقادیر معلوم و مجهول u و q در معادله‌ی (۳۰-۲) و با در نظر گرفتن مقادیر مرزی، این سیستم معادلات را می‌توان حل کرد. با بدست

آوردن مقادیر مرزی، می‌توان از معادله‌ی (۲-۳) برای یافتن جواب‌های داخلی استفاده کرد

$$u_i = - \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k + \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right), \quad (2-31)$$

که در آن $i = N + 1, \dots, N + L$ است و تمامی عبارات سمت راست معلوم هستند.

۲-۴- پیاده‌سازی *DRM* با استفاده از المان‌های خطی و ناپیوسته

همانطور که در قسمت ۲-۲-۱ بیان شد، استفاده از المان‌های خطی منجر به تولید نقاط گوشه‌ای می‌شود که دارای دو مقدار مشتق متفاوت در دو طرف می‌شود. در این حالت، برای بدست آوردن یک سیستم بسته، باید اطلاعات کافی برای هر کدام از نقاط مرزی تولید شود که در این صورت استفاده از المان‌های ناپیوسته ضروری است. در این قسمت، برای نقاط هم محلی، دو نقطه گاوس-لژاندر یعنی $-\sqrt{3}/3$ و $\sqrt{3}/3$ استفاده شده است. برای تعیین نقاط هم محلی در این روش، فرض کنید N المان با نقاط انتهایی $(X_1, Y_1), \dots, (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ موجود باشد، بنابراین می‌توان نقاط هم محلی درون المان وابسته به نقاط (X_i, Y_i) و (X_{i+1}, Y_{i+1}) را با استفاده از درونیابی خطی روی بازه‌ی $[-1, 1]$ و پیدا کردن نقاط متناظر $-\sqrt{3}/3$ و $\sqrt{3}/3$ به صورت زیر تعیین کرد

$$x_{2i-1} = X_i + \frac{(X_{i+1} - X_i)}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad y_{2i-1} = Y_i + \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$x_{2i} = X_i + \frac{(X_{i+1} - X_i)}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad y_{2i} = Y_i + \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (2-32)$$

که منجر به تولید $2N$ نقطه می‌شود. بنابراین با احتساب نقاط درونی، تعداد کل نقاط $2N + L$ خواهد بود. با استفاده از درونیابی قطعه‌ای خطی برای u و q روی المان k داریم

$$\begin{cases} u(\xi) = l_1(\xi)u_{2k-1} + l_2(\xi)u_{2k}, \\ q(\xi) = l_1(\xi)q_{2k-1} + l_2(\xi)q_{2k}, \end{cases} \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (2-33)$$

که در آن u_{2k-1} و u_{2k} مقادیر u را در نقاط درونیابی (x_{2k-1}, y_{2k-1}) و (x_{2k}, y_{2k}) نمایش می‌دهند و q_{2k-1} و q_{2k} نیز، مقادیر q در همان نقاط هستند. همچنین $l_1(\xi)$ و $l_2(\xi)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$l_1(\xi) = \frac{\xi - \sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3}, \quad l_2(\xi) = \frac{\xi + \sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3}.$$

با جایگذاری درونیابی خطی (2-33) در معادله‌ی (2-3) داریم

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* (l_1(\xi)u_{2k-1} + l_2(\xi)u_{2k}) d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* (l_1(\xi)q_{2k-1} \\ + l_2(\xi)q_{2k}) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* (l_1(\xi)\hat{u}_{2k-1,j} \right. \\ \left. + l_2(\xi)\hat{u}_{2k,j}) d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* (l_1(\xi)\hat{q}_{2k-1,j} + l_2(\xi)\hat{q}_{2k,j}) d\Gamma \right] \end{aligned}$$

اگر مانند قبل، از ماتریس‌های H و G با مرتبه و شکل جدید استفاده کنیم، داریم

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{k=1}^N (H_{i,2k-1} u_{2k-1} + H_{i,2k} u_{2k}) - \sum_{k=1}^N (G_{i,2k-1} q_{2k-1} + G_{i,2k} q_{2k}) \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left[c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N (H_{i,2k-1} \hat{u}_{2k-1,j} + H_{i,2k} \hat{u}_{2k,j}) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N (G_{i,2k-1} \hat{q}_{2k-1,j} + G_{i,2k} \hat{q}_{2k,j}) \right] \end{aligned}$$

$$A_{L'} = \begin{bmatrix} \Upsilon r - (-M + \Upsilon)h & -r & & & \\ & -r & \Upsilon r - (-M + \Upsilon)h & -r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -r & \Upsilon r - (-h) \end{bmatrix}$$

$$C_L = \begin{bmatrix} \circ \\ \ddots \\ -\frac{r}{\Upsilon} \end{bmatrix}, \quad B_L = \begin{bmatrix} (-M + \Upsilon)h \\ \ddots \\ -h \end{bmatrix}$$

$$A_R = \begin{bmatrix} \Upsilon r + h & -r & & & \\ -r & \Upsilon r + \Upsilon h & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & \Upsilon r + (M - \Upsilon)h & -r \\ & & & -r & \Upsilon r + (M - \Upsilon)h \end{bmatrix}$$

$$A_{R'} = \begin{bmatrix} \Upsilon r + h & -r & & & \\ -r & \Upsilon r + \Upsilon h & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & \Upsilon r + (M - \Upsilon)h & -r \\ & & & -r & \Upsilon r + (M - \Upsilon)h \end{bmatrix}$$

$$C_R = \begin{bmatrix} -\frac{r}{\Upsilon} \\ \ddots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} -h \\ \ddots \\ (-M + \Upsilon)h \end{bmatrix}$$

که در آن $r = \frac{\tau}{h\Upsilon}$

اندیس‌های L و R به ترتیب بخش‌های ماتریس مرتبط با زیردامنه‌های چپ و راست را نشان می‌دهند. به عنوان مثال P_{LR} قسمت‌های متعلق به مقادیر نقاط زیر مساله ۱ هستند که با ضرایب سمت راست در ارتباط هستند.

۳-۲-۳- استفاده از طرح‌های تفاضلی مراتب بالاتر

با استفاده از تقریب‌های تفاضل متناهی مراتب بالاتر، دقت جواب می‌تواند بهبود یابد. برای

رسیدن به این هدف، ابتدا فرمول‌های تفاضل متناهی قبلی را در خطوط $x = ih$ برای $i =$

$1 - M$ و $1 + M$ به صورت زیر بدست می‌آوریم،

$$ih \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + f_{i,j} \quad (17-3)$$

و همچنین طرح تفاضلی زیر را برای بقیه‌ی نقاط استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} -ih \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 3u_{i,j}}{2\tau} &= \frac{1}{12h^2} (-u_{i+2,j} + 16u_{i-1,j} - 30u_{i,j} \\ &+ 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2}) + f_{i,j} \end{aligned} \quad (18-3)$$

استفاده از این فرمول، دقت جواب را تا مرتبه $O(hk^2) + O(h^4)$ بهبود می‌بخشد. همان‌طور که

متعاقبا مشاهده خواهد شد، با استفاده از این فرمول، خطای عددی به صورت چشمگیری کاهش

می‌یابد.

دانشگاه کردستان

بنابراین، با جایگذاری (۳۶-۳) در (۳۸-۳) و استفاده از روش هم محلی در $x = x_N$ داریم

$$\sum_{l=N-L}^{N+L} \eta_l \varphi_{xx}(\|x_N - x_l\|) = -f(\circ, t_j), \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (39-3)$$

با قرار دادن (۳۷-۳) در (۳۹-۳) می‌توان مقادیر η_k را بدست آورد که با قرار دادن این ضرایب

در (۳۶-۳) مقادیر جواب $u(x_N, t_j)$ بر روی مرز فرضی به روز رسانی می‌شود. این رویه را به

صورت تکراری انجام می‌دهیم تا جواب مرزی $u_{\circ j}^{(m)}$ در تکرار m به جواب دلخواه برسد.

۳-۳-۲- نتایج عددی

برای اینکه کارایی روش را نشان دهیم، تعدادی نتایج عددی معادله‌ی پسر-پیشرو را که با

استفاده از روش MQ با پارامتر شکل ϵ بدست آمده‌اند را آرایه می‌کنیم.

مثال ۳-۳-۱. معادله‌ی (۱-۳) را با شرایط $u_{\circ}(x) = \circ$ ، $g_1(t) = \circ$ ، $g_{-1}(t) = \circ$

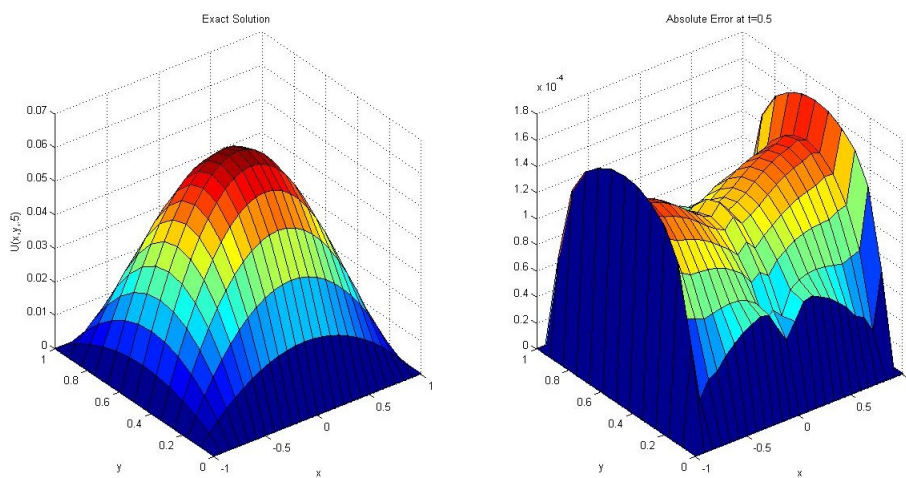
$u_1(x) = \circ$ ، در نظر بگیرید که در آن

$$f(x, t) = \begin{cases} 2x(x^2 - 1)t[(t-1)^2 - 4x^2 + t(t-1)] - \\ t^2[(t-1)^2 - 24x^2 + 4] & x \geq \circ, t \in [0, 1], \\ 2x(x^2 - 1)(t-1)(2t^2 - t - 4x^2) - \\ 2(t-1)^2(t^2 - 24x^2 + 4) & x \leq \circ, t \in [0, 1], \end{cases} \quad (40-3)$$

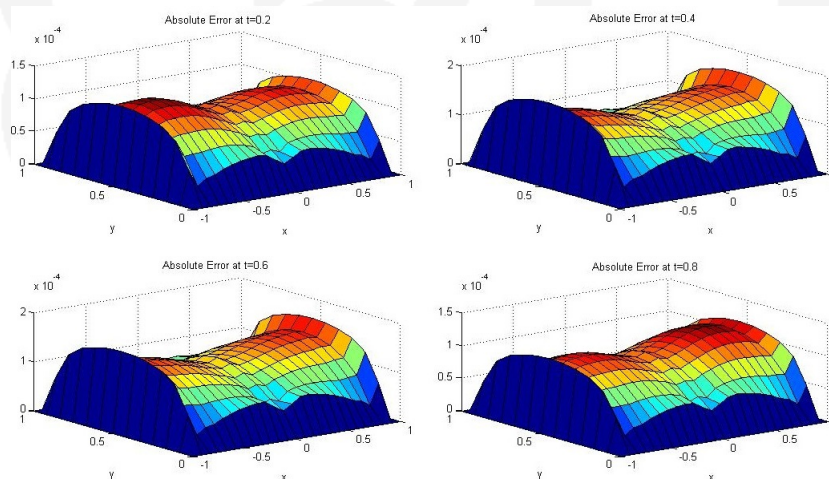
و جواب دقیق مساله‌ی فوق به صورت زیر داده شده است:

$$u(x, t) = \begin{cases} (x^2 - 1)t^2[(t-1)^2 - 4x^2] & x \geq \circ, t \in [0, 1], \\ (x^2 - 1)(t^2 - t - 4x^2)(t-1)^2 & x \leq \circ, t \in [0, 1], \end{cases} \quad (41-3)$$

این مساله را با روش مورد نظر حل خواهیم کرد و نتایج عددی را برای موارد مختلفی از



شکل ۴-۱: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = 145$ ، $N^{(2)} = 145$ و $M = 80$ و $k = 28$ در زمان $t = 0.5$ برای مثال ۴-۲-۱

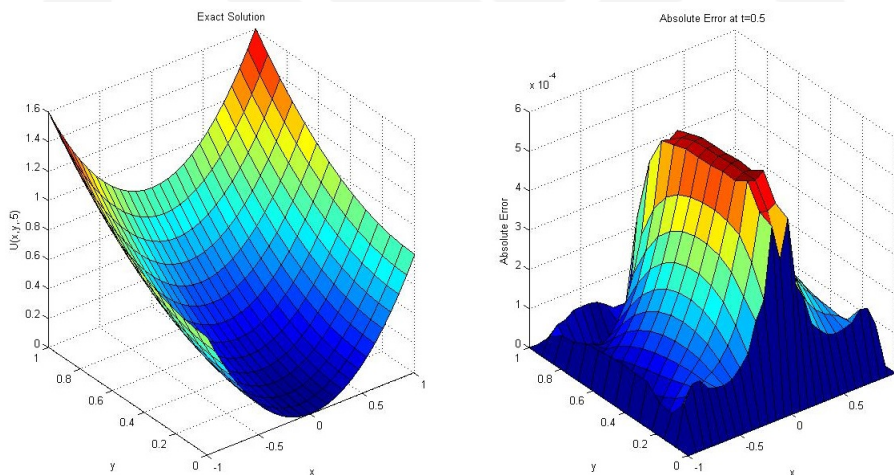


شکل ۴-۲: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 145$ ، $N^{(2)} = 145$ و $M = 80$ و $k = 28$ در زمانهای $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای مثال ۴-۲-۱

جواب دقیق مساله‌ی فوق را در حالت‌های مختلف بر اساس تعداد نقاط و گام‌های زمانی و تعداد تکرار بدست آورده‌ایم. مقادیر خطا که بر اساس $Maxerror$ و $RMSE$ اندازه‌گیری شده‌اند، در جداول ۴-۱ و ۴-۲ به ترتیب برای دامنه‌های مستطیلی و نیم‌دایره‌ای ارائه شده‌اند.

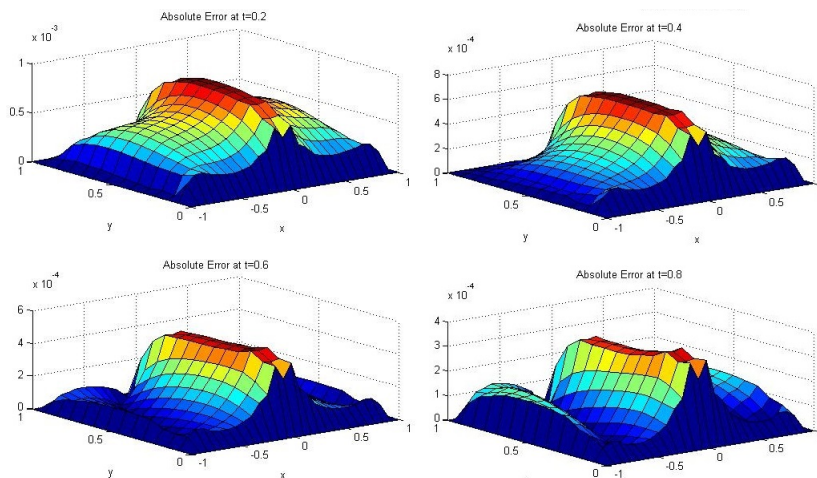
جدول ۴-۴: مقادیر خطای مثال ۴-۲-۲ در ناحیه نیم دایره‌ای

RMSE	Max error	k	M	$N^{(2)}$	$N^{(1)}$
۳E-۲۰.۴	۲E-۵۰.۳۲	۱۰		۵۰	۵۰
۳E-۸۰.۱	۳E-۳۰.۸	۱۲	۱۰	۷۹	۷۹
۳E-۱۰.۱	۳E-۸۰.۵	۲۰		۱۱۳	۱۱۳
۴E-۲۸.۳	۳E-۸۰.۱	۲۵	۲۰	۱۵۲	۱۵۲
۴E-۲۵.۲	۳E-۷۰.۱	۲۷	۲۵	۱۵۲	۱۵۲
۴E-۵۷.۱	۳E-۶۰.۱	۳۰	۳۰	۱۵۲	۱۵۲
۴E-۳۵.۱	۴E-۲۱.۹	۳۲			
۴E-۰۹.۱	۴E-۷۷.۸	۳۴	۴۰	۲۰۰	۲۰۰
۴E-۰۲.۱	۴E-۴۸.۸	۳۶			



شکل ۴-۳: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = ۱۷۰$ ، $N^{(2)} = ۱۷۰$ و $M = ۵۰$ و $k = ۴۲$ در زمان $t = ۰.۵$ برای مثال ۴-۲-۲

دانشگاه کردستان



شکل ۴-۴: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$, $N^{(2)} = 170$, $M = 50$ و $k = 42$ در زمانهای $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای مثال ۲-۲-۴

مثال ۴-۲-۳. معادله‌ی (۴-۱) را با شرایط زیر در نظر بگیرید

$$f(x, y, t) = \frac{-\cos t(xe^{-y} + 1)}{(1 + \sin t)^2} - \frac{xe^{-y}}{1 + \sin t}, \quad a(x) = x, \quad (4-29)$$

که در آن شرایط اولیه و نهایی به صورت زیر است

$$u(x, y, 0) = xe^{-y} + 1, \quad \frac{-\cos 1(xe^{-y} + 1)}{(1 + \sin 1)^2} - \frac{xe^{-y}}{1 + \sin 1},$$

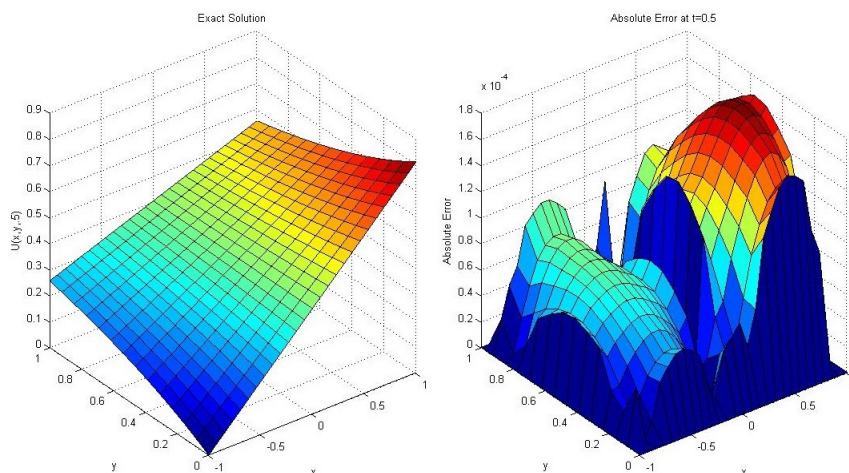
و شرط دیریکله نیز به این قرار است

$$u(x, y, t) = \frac{x^2 + y^2}{1 + t^2}, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 < t < 1$$

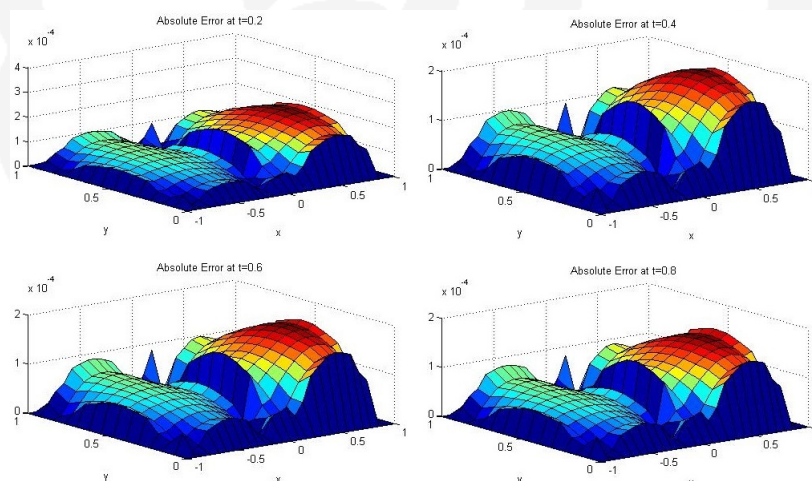
و با این شرایط، جواب دقیق (۴-۱)، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, y, t) = \frac{xe^{-y} + 1}{1 + \sin t}. \quad (4-30)$$

خطاهای عددی برای این مثال در جداول ۴-۵ و ۴-۶، به ترتیب برای دو دامنه‌ی



شکل ۴-۵: تصویر جواب دقیق و خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} = 170$ و $M = 50$ و $k = 40$ در زمان $t = 0.5$ برای مثال ۳-۲-۴



شکل ۴-۶: تصویر خطای مطلق با $N^{(1)} = 170$ ، $N^{(2)} = 170$ و $M = 50$ و $k = 42$ در زمانهای $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ برای مثال ۳-۲-۴

همانطور که مشاهده می‌شود با استفاده از تعداد نقاط نه چندان زیاد، جواب‌های دقیقی بدست می‌آید. علاوه بر این، افزایش تعداد نقاط هم محلی، دقت جواب‌ها را بهبود می‌بخشد که از لحاظ عددی همگرایی این روش را به تصویر می‌کشد.

از طرف دیگر، با توجه به بدون شبکه بودن روش، از هزینه‌ی محاسباتی و زمانی موجود در

۴-۳-۲- نتایج عددی

در این قسمت، برای نشان دادن کارایی روش، نتایج عددی را برای این روش بدست می آوریم. این روش را برای دو مثال متفاوت با دو دامنه‌ی مختلف مستطیلی و نیم‌دایره‌ای در نظر می گیریم. در این تحلیل عددی کارایی روش را در زمان اجرا و در تایید پایداری و دقت آن نشان داده‌ایم.

مثال ۴-۳-۱. فرض کنید جواب دقیق معادله‌ی پسر-پیشرو دوبردی به صورت زیر باشد

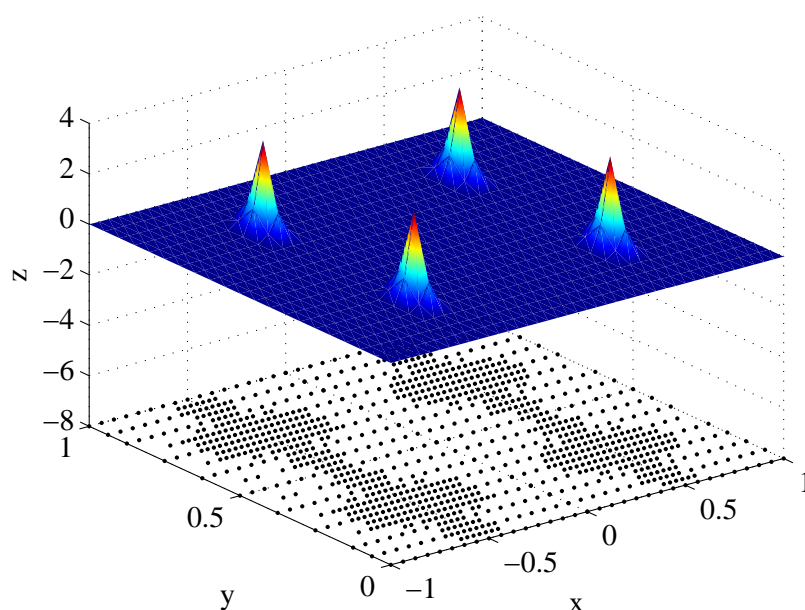
$$u(x, y, t) = 5 \left(e^{-500(x+0.5)500(y-0.75)^2} + e^{-500(x-0.5)^2-500(y-0.75)^2} + e^{-500(x+0.5)^2-500(y-0.25)^2} + e^{-500(x-0.5)^2-500(y-0.25)^2} \right) e^{-0.7\pi t}. \quad (4-32)$$

این جواب، تابعی است که دارای چند ناحیه با تغییرات سریع است و نقاط تعدیل شده باید در همسایگی تمامی این نقاط منفرد اعمال شوند. ابتدا، مساله فوق را با استفاده از روش غیرتکراری حل کرده‌ایم و سپس برای بهبود کارایی و دقت جواب، الگوریتم نقاط تعدیل شده را در دامنه‌ی $[0, 1] \times [-1, 1]$ برای حل مساله به کار می‌بریم. نتایج عددی نشان می‌دهد که جوابهای این روش با استفاده از نقاط یکنواخت، دقیق هستند و همچنین، توزیع تعدیل شده که نقاط بیشتری را به دنبال خواهد داشت، در مقایسه با توزیع یکنواخت دارای جواب دقیق‌تری خواهد بود (به جدول ۴-۷ توجه کنید).

جدول ۴-۷: مقایسه‌ی دقت، عدد شرطی و زمان CPU بین دو توزیع یکنواخت و تعدیل شده در بازه‌ی $[0, 1] \times [-1, 1]$ با $\delta t = 0.01$ و $T = 0.5$.

Time(s)	$\kappa(A)$	RMS	L_∞	Shape	N	Method
۲۹.۳۳	2.73×10^6	1.43×10^{-2}	1.14×10^{-1}	۹۰.۷	۱۰۵۸	Uniform
۳۴.۲۱۸	1.17×10^7	1.30×10^{-4}	3.19×10^{-4}	۶۰.۱۰	۲۱۷۸	Uniform
۸۰.۳۹	9.71×10^6	3.32×10^{-4}	8.29×10^{-4}	۲۰.۱۰	۱۰۵۸	Adaptive

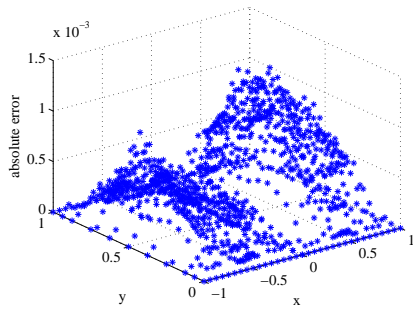
در شکل ۴-۷ تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده شده نهایی نشان داده شده است.



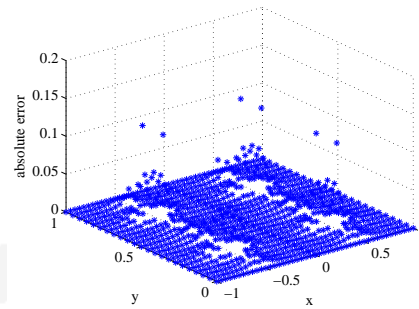
شکل ۴-۷: تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده در بازه $[0, 1] \times [-1, 1]$ با $T = 0.5$ و $\delta t = 0.001$.

همچنین، در شکل ۴-۸ خطاهای مطلق برای توزیعهای یکنواخت و تعدیل شده در بازه $[0, 1] \times [-1, 1]$ نشان داده شده است

دانشگاه کردستان



توزیع تعدیل شده: $\epsilon = 10^{-20}$



توزیع یکنواخت: $\epsilon = 7/90$

شکل ۴-۸: خطای مطلق روی بازه $[0, 1] \times [-1, 1]$ با $N = 1058$ و $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$.

که در همه حالات $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$ را فرض کرده‌ایم. توجه داشته باشید که تعداد نقاط دو زیر دامنه می‌تواند متفاوت باشند، اگرچه در مثال‌های عددی تعداد نقاط یکسان به کار برده‌ایم.

مثال ۴-۳-۲. جواب معادله پسر-پیشرو را به صورت زیر در نظر بگیرید

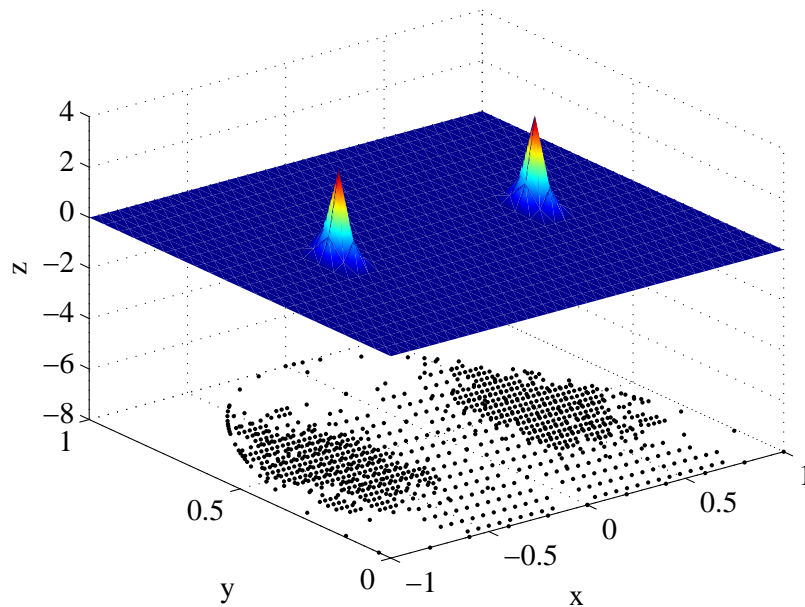
$$u(x, y, t) = 5 \left(e^{-500(x+0.5)^2 - 500(y-0.5)^2} + e^{-500(x-0.5)^2 - 500(y-0.5)^2} \right) e^{-0.2\pi t}. \quad (4-33)$$

تایج عددی نشان می‌دهد که جوابهای حاصل از این روش با استفاده از نقاط یکنواخت، دقیق هستند و همچنین، توزیع تعدیل شده که نقاط بیشتری را به دنبال خواهد داشت در مقایسه با توزیع یکنواخت دارای جواب دقیق‌تری خواهد بود (به جدول ۴-۸ توجه کنید).

جدول ۴-۸: مقایسه‌ی دقت، عدد شرطی و زمان CPU بین دو توزیع یکنواخت و اصلاح شده در دامنه نیم دایره‌ای با $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$.

Time(s)	$\kappa(A)$	RMS	L_∞	Shape	N	Method
۷۴.۴۳	1.40×10^9	6.48×10^{-2}	2.65×10^{-1}	۳۵.۶	۱۲۰۰	Uniform
۷۰.۱۷۳	8.07×10^7	2.20×10^{-3}	4.28×10^{-3}	۵۵.۱۱	۲۱۰۰	Uniform
۵۴.۳۴	1.11×10^{10}	5.82×10^{-4}	2.27×10^{-3}	۷۵.۱۰	۱۰۵۸	Adaptive

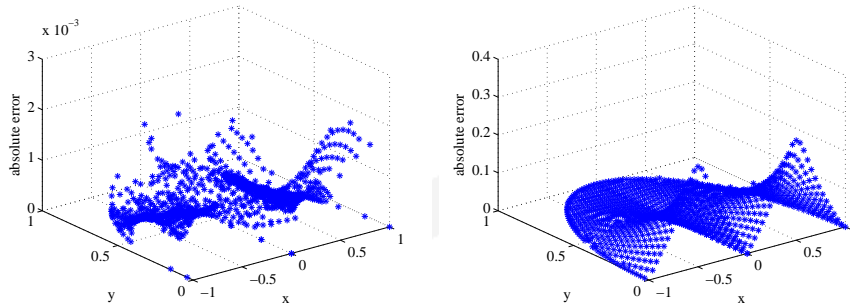
در شکل ۴-۹ تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده نهایی نشان داده شده است.



شکل ۴-۹: تصاویر جواب دقیق و توزیع تعدیل شده در دامنه نیم دایره‌ای با $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$.

همچنین، در شکل ۴-۱۰ خطاهای دقیق برای توزیعهای یکنواخت و تعدیل شده در دامنه نیم دایره‌ای نشان داده شده است که در همه حالات $\delta t = 0.001$ و $T = 0.5$ را فرض کرده‌ایم. توجه داشته باشید که پایداری هر دو توزیع تقریباً یکسان است، اما در نقاط تعدیل شده زمان اجرای CPU کاهش می‌یابد و در مقایسه با حالت یکنواخت جواب‌های دقیق‌تری بدست می‌آید. همانطور که مشاهده می‌شود، با استفاده از تعدادی نقاط مشخص، جواب‌هایی با دقت بالا بدست آمده است. با این وجود، افزایش تعداد نقاط هم محلی منجر به بهبود دقت جوابها می‌شود که همگرایی روش را نتیجه می‌دهد. از طرفی، با توجه به بدون شبکه بودن این روش، هزینه‌های تشکیل شبکه حذف شده است. بعلاوه، برای بهبود دقت و کارایی روش، الگوریتم نقاط تعدیل شده نقاط به کار رفته است. در نتیجه دقت بالا و کارایی محاسباتی این روش را به خوبی می‌توان

مشاهده کرد.



توزیع یکنواخت: $N = 635$, $\epsilon = 10^{-3}$ توزیع تعدیل شده: $N = 1075$, $\epsilon = 10^{-3}$
 ۱۲۰۰ ۱۰۵۸

شکل ۴-۱۰: خطای مطلق روی دامنه نیم دایره‌ای با $N = 1058$, $\delta t = 0.01$ و $T = 0.5$.

۴-۴-۴ روش DRM

ابتدا گسسته‌سازی زمانی را به صورت زیر برای زیرمساله‌های (۴-۲) و (۴-۳) انجام

می‌دهیم.

۴-۴-۱-۱ گسسته‌سازی زمانی

در این قسمت، گسسته‌سازی زمانی را با استفاده از روش کرانک-نیکلسون انجام می‌دهیم که

با توجه به مشابهت دو زیرمساله، ما فقط روش ارائه شده برای زیرمساله‌ی ۲ را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید زمان را با M گام زمانی $t_m = m\Delta t$; $m = 1, \dots, M$ گسسته‌سازی کنیم که در

آن $\Delta t = \frac{1}{M-1}$ باشد. با استفاده از روش کرانک-نیکلسون برای زیرمساله‌ی ۲ داریم

$$a(x) \frac{u^{n+1} - u^n}{k} - \frac{\nabla^2 u^{n+1} + \nabla^2 u^n}{2} = \frac{f(X, t_{n+1}) + f(X, t_n)}{2} + R, \quad (4-34)$$